

UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Faculté des Sciences

Département de Physique



1.

EXERCICES DE RELATIVITE GENERALE

Exercices du cours PHYS2143

Assistante : Sophie Pireaux, B301 FYMA

Rédaction : Michael Beuthe et Sophie Pireaux

Année académique 2001-2002

Quelques références utiles en plus du syllabus fourni par le professeur J-M. Gérard:

- S. Weinberg, "Principles and applications of the General Theory of Relativity"
- Eddington, "The Mathematical Theory of Relativity" Cambridge University Press, 1924
- B.F. Schutz, "A first course in General Relativity", Cambridge University Press, 1993
- L. Landau, E. Lifchitz, "Physique Théorique, tome 2: Théorie des champs", Ed. Moscou, 1989
- J.A. Wheeler, C. Misner, K.S. Thorne, "Gravitation", W.H. Freeman and Co., 1973
- A. Lichnerowicz, "Eléments de calcul tensoriel", Paris, Librairie A. Colin, 1950
- J.L. Synge, A. Schild, "Tensor calculus, University of Toronto Press 1949
- http://www.fyma.ucl.ac.be/~pireaux/cours_net_GR.html
...pour d'autres notes de cours de Relativité Générale disponibles sur le net.

... n'hésitez surtout pas à consulter ces références pour résoudre les exercices qui vous sont proposés.

Rappelez-vous que **ce cours est un cours difficile et qui demande beaucoup de travail! Il est donc plus que souhaitable que vous prépariez les séances d'exercices (avant chaque séance, une série d'exercices vous seront remis). Surtout n'hésitez pas à résoudre des exercices supplémentaires à ceux suggérés aux séances!**

L'assistante est à votre disposition pour toute question...

1 TENSEURS

1.1 Note théorique

1.1.1 Les vecteurs en coordonnées quelconques

Intérêt du formalisme tensoriel: Vous connaissez déjà, dans l'espace à 3 dimension ($n = 3$), un exemple de tenseur sous le nom de vecteur. Le vecteur est usuellement défini en donnant ses composantes dans une base particulière:

$$\vec{V} = \sum_{i=1,2,3} V^i e_i = \sum_{i=1,2,3} g_{ij} V^i e^j ,$$

où $g_{ij} = e_i \cdot e_j$ est la metrique, qui permet de définir le produit scalaire de deux vecteurs:

$$\vec{V} \cdot \vec{W} = \sum_{i=1,2,3} g_{ij} V^i W^j$$

Les composantes V^i peuvent être réunies sous l'appellation composantes d'un "tenseur à un indice contravariant (indice en haut)" \vec{V} , et les composantes e_i peuvent être réunies sous l'appellation composantes du "tenseur à un indice covariant (indice en bas)" de base e (souvent appelé 1-forme de base, "forme" parce portant des indices covariants et "un" pour le nombre d'indices).

L'on sous-entend que les indices i, j prennent les valeurs de 1 à n .

Pour montrer l'intérêt du formalisme tensoriel d'indice tel qu'utilisé au cours, prenons par exemple les coordonnées cartésiennes, c-à-d $g_{ij} = \delta_{ij}$ (base orthonormée x, y et z).

Les opérations vectorielles s'écrivent simplement avec la notation tensorielle en terme d'indices. Par exemple, le produit vectoriel $\vec{Q} \equiv \vec{U} \wedge \vec{V}$ est exprimé dans une base orthonormée par

$$Q^i = \sum_{j,k=1,2,3} \epsilon_{ijk} U^j V^k ,$$

où ϵ_{ijk} est un ensemble de nombres définis par

$$\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = -\epsilon_{132} = -\epsilon_{321} = -\epsilon_{213} = 1 , \quad (1)$$

et vaut zéro si deux indices sont répétés. Dès lors, la vérification d'identités vectorielles est grandement facilitée. Ainsi, l'identité

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) = \vec{V} \cdot (\vec{W} \wedge \vec{U})$$

se démontre comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot (\vec{V} \wedge \vec{W}) &= \sum_{i=1,2,3} U^i (\vec{V} \wedge \vec{W})^i \\ &= \sum_{i,j,k=1,2,3} U^i \epsilon_{ijk} V^j W^k \\ &= \sum_{i,j,k=1,2,3} V^j \epsilon_{jki} W^k U^i \\ &= \sum_{j=1,2,3} V^j (\vec{W} \wedge \vec{U})^j \\ &= \vec{V} \cdot (\vec{W} \wedge \vec{U}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété de permutation (1) de ϵ_{ijk} . La démonstration classique, composante par composante, est beaucoup plus laborieuse. Si vous n'en êtes pas convaincus, pensez que les calculs en relativité générale s'effectuent avec des vecteurs à 4 composantes au lieu de 3 !

Les vecteurs ont été utilisés ci-dessus sans recevoir de définition. Leur propriété essentielle est en fait leur comportement sous transformation de coordonnées.

Envisageons tout d'abord les vecteurs sous changement de coordonnées dans un espace à deux dimensions: Considérons le cas d'une rotation d'un angle θ de la base orthogonale (coordonnées cartésiennes) du plan ($i, j = 1$ à $n = 2$, sont pris comme x et y) (fig. 1).

Les coordonnées (x, y) d'un point P deviennent alors (\tilde{x}, \tilde{y}) :

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= + \cos \theta x + \sin \theta y, \\ \tilde{y} &= - \sin \theta x + \cos \theta y. \end{aligned}$$

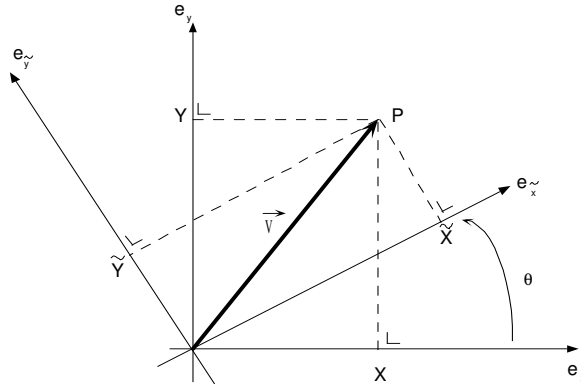


Figure 1: Exemple de changement de coordonnées: rotation.

Un vecteur sera défini provisoirement comme un *déplacement* entre deux points A et B de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) . Les coordonnées du vecteur sont donc $(V^x, V^y) \equiv (x_B - x_A, y_B - y_A)$ et se transforment sous la rotation de la base comme un vecteur contravariant (indices en haut):

$$\begin{pmatrix} V^{\tilde{x}} \\ V^{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \end{pmatrix} \equiv \mathcal{A} \begin{pmatrix} V^x \\ V^y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$V^{\tilde{i}} = \mathcal{A}^i_j V^j$$

Remarquez que la loi de transformation d'un vecteur est la même quels que soient les points A et B puisque l'angle θ a été choisi une fois pour toutes. Une nouvelle base de coordonnées est définie par la transformation des vecteurs de base covariants (indices en bas):

$$\begin{pmatrix} e_{\tilde{x}} \\ e_{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\cos\theta & +\sin\theta \\ -\sin\theta & +\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \equiv (\mathcal{A}^{-1})^T \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$e_{\tilde{i}} = (\mathcal{A}^{-1})^j_i e_j$$

Les coordonnées des vecteurs **contravariants** se transforment avec la loi $(\mathcal{A} = (\frac{\partial \tilde{x}}{\partial x}))$ inverse de transformation par rapport aux vecteurs covariants! De sorte que la réalité physique du vecteur $\vec{V} = \sum_{i=1,2,3} V^i e_i = \sum_{\tilde{i}=1,2,3} V^{\tilde{i}} e_{\tilde{i}}$ reste inchangée lorsqu'on

change de base (= changer de description! Pour une transformation passive de coordonnées).

Examinons maintenant le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires définies par

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \end{cases}$$

Le changement de coordonnées différant en chaque point, la loi de transformation du vecteur défini comme déplacement entre deux points sera compliquée. Par contre, la transformation garde une forme simple si l'on se restreint aux vecteurs de déplacement entre deux points infiniment proches. Un tel vecteur, de composantes (dx, dy) dans la base orthogonale, se réexprimera dans la base polaire par

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} dr &= \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy = + \cos \theta dx + \sin \theta dy, \\ d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = -\frac{1}{r} \sin \theta dx + \frac{1}{r} \cos \theta dy. \end{aligned}$$

Par extension, un vecteur \vec{V} , de composantes (V^x, V^y) , attaché à un point de coordonnées (r, θ) , sera défini comme se transformant de la même façon que le vecteur infinitésimal :

$$\begin{aligned} V^r &= \frac{\partial r}{\partial x} V^x + \frac{\partial r}{\partial y} V^y = + \cos \theta V^x + \sin \theta V^y, \\ V^\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} V^x + \frac{\partial \theta}{\partial y} V^y = -\frac{1}{r} \sin \theta V^x + \frac{1}{r} \cos \theta V^y. \end{aligned} \quad (2)$$

où donc $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} + \cos \theta & + \sin \theta \\ -\frac{1}{r} \sin \theta & +\frac{1}{r} \cos \theta \end{pmatrix}$.

Cela revient à définir une nouvelle base de coordonnées en chaque point de l'espace:

$$\begin{aligned} e_r &= +\cos\theta e_x + \sin\theta e_y, \\ e_\theta &= -r \sin\theta e_x + r \cos\theta e_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Remarquez que cette base est différente en chaque point du plan (fig. 2).

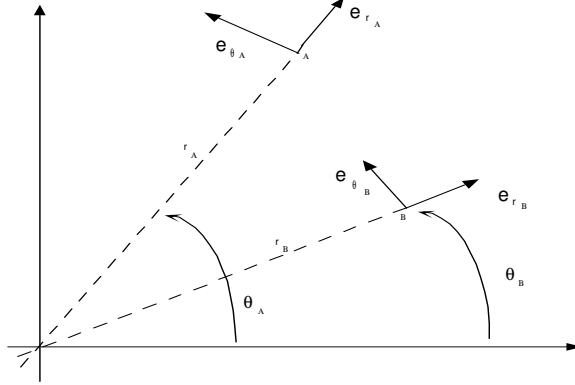


Figure 2: Base différente en chaque point du plan.

Envisageons ensuite les vecteurs sous changement de coordonnées dans un espace à trois dimensions: Par analogie avec (2), un *vecteur* sera défini par sa propriété de transformation sous un changement quelconque de coordonnées $x^a \rightarrow \tilde{x}^a$:

$$V^{\tilde{a}} = \sum_{b=1,2,3} \frac{\partial \tilde{x}^a}{\partial x^b} V^b,$$

où $V^{\tilde{a}}$ sont les composantes du vecteur dans le nouveau système de coordonnées.

En analogie avec (3), la base du système de coordonnées se transforme inversement :

$$e_{\tilde{a}} = \sum_{b=1,2,3} \frac{\partial x^b}{\partial \tilde{x}^a} e_b.$$

Tenseur métrique: On pourrait maintenant se demander comment calculer la norme d'un vecteur. C'est très simple grâce au produit scalaire :

$$\|\vec{V}\|^2 \equiv \vec{V}^2 = \vec{V} \cdot \vec{V} = \left(\sum_{a=1,2,3} V^a e_a \right) \left(\sum_{b=1,2,3} V^b e_b \right) = \sum_{a,b=1,2,3} (e_a \cdot e_b) V^a V^b.$$

Les produits scalaires des vecteurs de base forment les composantes de la *métrie* g_{ab} du système de coordonnées :

$$g_{ab} \equiv e_a \cdot e_b .$$

La métrique est symétrique par définition :

$$g_{ab} = g_{ba} .$$

Donc

$$\|\vec{V}\|^2 = \sum_{a,b=1,2,3} g_{ab} V^a V^b .$$

Par exemple, en coordonnées polaires,

$$g_{rr} \equiv e_r \cdot e_r = (\cos \theta e_x) \cdot (\cos \theta e_x) = 1 ,$$

$$g_{r\theta} = g_{\theta r} \equiv e_r \cdot e_\theta = (\cos \theta e_x) \cdot (-r \sin \theta e_x + r \cos \theta e_y) = 0 ,$$

$$g_{\theta\theta} \equiv e_\theta \cdot e_\theta = (-r \sin \theta e_x + r \cos \theta e_y) \cdot (-r \sin \theta e_x + r \cos \theta e_y) = r^2 ,$$

où l'on a utilisé les formules (3) et la propriété d'orthogonalité de la base (e_x, e_y) .

Dès lors,

$$\|\vec{V}\|^2 = (V^x)^2 + (V^y)^2 = (V^r)^2 + r^2 (V^\theta)^2 .$$

Il est temps d'étendre ces notions à des espaces courbés de dimension quelconque.

1.1.2 Formalisme général:

Références conseillées: En ce qui concerne la description mathématique de ces objets¹, le lecteur est référé au cours "Eléments de physique théorique et mathématique (Phys 1140)" de J-P. Antoine, J. Pestieau et J. Weyers, p48 à 63 et p277 à 286. De notre point de vue, il suffira de les considérer comme des éléments à combiner suivant une grammaire simple et stricte. Leurs propriétés seront expliquées sous la forme d'un ensemble de règles rappelées ci-dessous.

¹On peut aussi aller voir "Eléments de calcul tensoriel" de A. Lichnerowicz, "Tensor calculus" de J. L. Synge et A. Schild ou dans la plupart des livres de relativité générale, par exemple "A first course in general relativity" de Schutz.

Egalement, il existe un cours de "Géométrie Riemannienne" donné par L. Haine et Y. Felix qui vous est proposé au second semestre (MATH 2130 [30-15-0]).

Notion de tenseurs: Soit un espace à n dimensions. Un *tenseur* est un ensemble de nombres, appelés composantes du tenseur, attaché à chaque point de l'espace. Par exemple, $T^{\alpha\beta}(P)$ est un ensemble de n^2 nombres ($\alpha, \beta = 1 \dots n$) attaché à un point P de l'espace, dans une base donnée. Une transformation générale de coordonnées, *définie en ce même point*, va mélanger ces nombres entre eux de manière simple pour fournir les composantes du tenseur dans le nouveau système de coordonnées, $T^{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}(P)$ ou $\widetilde{T}^{\alpha\beta}(P)$. Le tenseur est *défini* par son comportement sous cette transformation (voir plus loin). Les quantités obtenues après transformation générale de coordonnées $x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha$ seront désignées par le symbole "tilde". Dans le premier système de coordonnées, P aura des coordonnées x_P^α tandis que dans le second système de coordonnées il aura des coordonnées \tilde{x}_P^α .

Un tenseur est dit de type (p, q) où p est le nombre d'indices contravariants (en haut) et q le nombre d'indices covariants (en bas).

Définitions:

1. ϕ est un *scalaire* si $\tilde{\phi}(\tilde{x}_P^\alpha) = \phi(x_P^\alpha)$.
2. V^α est un *vecteur contravariant*, ou *tenseur de type (1,0)*, si

$$\tilde{V}^\alpha(\tilde{x}_P^\mu) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_P V^\beta(x_P^\mu),$$

avec une sommation implicite sur l'indice β ($\beta = 1 \dots n$). Cette équation étant valable en tout point P , on ne spécifiera plus les coordonnées du point en question :

$$\tilde{V}^\alpha = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} \Big|_P V^\beta,$$

Il faudra cependant toujours se rappeler que *toute expression tensorielle est évaluée en un point donné*. L'exemple typique du vecteur contravariant est le déplacement infinitésimal dx^α .

3. U_α est un *vecteur covariant*, ou *tenseur de type (0,1)*, si

$$\tilde{U}_\alpha(\tilde{x}_P^\mu) = \frac{\partial x^\beta}{\partial \tilde{x}^\alpha} \Big|_P U_\beta(x_P^\mu).$$

Notez que la position de l'indice change du tout au tout la loi de transformation. L'exemple typique est la dérivée d'un scalaire $\frac{\partial \phi}{\partial x^\alpha}$.

4. Si un indice supérieur est identique à un indice inférieur, il y a toujours une sommation implicite sur ces indices :

$$A^\alpha B_\alpha \equiv \sum_{\alpha=1\dots n} A^\alpha B_\alpha ,$$

où n est le nombre de dimensions de l'espace(-temps). C'est la convention dite "convention d'Einstein".

5. Soit p le nombre d'indices supérieurs et q le nombre d'indices inférieurs. $T^{\alpha\dots\beta}_{\mu\dots\nu}$ est un *tenseur de type* (p,q) , c.-à-d. p fois contravariant et q fois covariant, si

$$\tilde{T}^{\alpha\dots\beta}_{\mu\dots\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\rho} \cdots \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} \cdots \frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\nu} T^{\rho\dots\sigma}_{\gamma\dots\delta} .$$

Un exemple important est la *métrique* $g_{\alpha\beta}$, définie par l'élément de longueur $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. On vérifie que c'est un tenseur symétrique de type $(0,2)$.

La *métrique dite de Minkowski*, espace plan cartésien, sera notée

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

6. Les composantes du *delta de Kronecker* δ_β^α sont définies dans tout système de coordonnées comme nulles sauf si les deux indices sont égaux. Dans ce cas, elles sont égales à 1. On vérifie que c'est un tenseur de type $(1,1)$. Il est de plus (avec le tenseur nul) le seul tenseur invariant, c.-à-d. que ses composantes sont identiques dans tout système de coordonnées.

7. La *métrique inverse* $g^{\beta\gamma}$ est définie par

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma .$$

On vérifie que c'est un tenseur de type $(2,0)$.

8. L'élément de longueur invariant sous transformation de coordonnées généralisées, est $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = \widetilde{g}_{\alpha\beta} d\widetilde{x}^\alpha d\widetilde{x}^\beta$.

9. Les transformations de Lorentz constituent un cas particulier de transformations générales de coordonnées. La matrice de transformation $\frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta}$, identique en tout point, est obtenue en dérivant la relation $\widetilde{x}^\alpha = \Lambda^\alpha_\beta x^\beta$:

$$\frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^\beta} = \Lambda^\alpha_\beta ,$$

où Λ^α_β est la matrice correspondant à la transformation de Lorentz.

10. Les indices ne suffisent pas à caractériser un tenseur ! Nous rencontrerons par exemple un objet écrit $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$, appelé *connexion* et qui ne se transforme pas comme un tenseur (c-à-d qui ne vérifie pas la loi de transformation donnée à la cinquième définition).

Un autre exemple est une matrice de transformation de lorentz Λ^α_β qui n'est pas définie en un point (un des indices correspond à une base, l'autre indice correspond à l'autre base!).

Algèbre:

1. La *combinaison linéaire* de plusieurs tenseurs du même type est un tenseur du même type :

$$T^\mu_\nu \equiv a A^\mu_\nu + b B^\mu_\nu ,$$

où a et b sont des constantes.

2. Le *produit direct* de deux tenseurs de types (a, b) et (c, d) est un tenseur de type $(a + c, b + d)$:

$$T^\mu_\nu{}^\rho \equiv A^\mu_\nu C^\rho .$$

3. La *contraction* d'un tenseur de type (p, q) est définie en égalant un indice covariant avec un indice contravariant (avec pour conséquence une sommation implicite) et fournit un tenseur de type $(p - 1, q - 1)$:

$$T^{\mu\rho} \equiv T^\mu_\nu{}^{\rho\nu} .$$

4. Un indice contravariant peut être “transformé” en un indice covariant en le contractant avec la métrique :

$$g_{\alpha\beta} T^{\beta\gamma} \equiv T_{\alpha}{}^{\gamma} .$$

5. Un indice covariant peut être “transformé” en un indice contravariant en le contractant avec la métrique inverse :

$$g^{\alpha\beta} T_{\beta\gamma} \equiv T^{\alpha}{}_{\gamma} .$$

...Ces deux dernières opérations établissent une dualité entre les indices covariants et contravariants. L'utilisation d'une métrique permet donc de considérer comme même objet physique un tenseur quelles que soient les positions de ses indices.

6. La dérivée usuelle d'un tenseur n'est pas un tenseur, sauf dans le cas du scalaire.

Equations tensorielles:

1. Une équation tensorielle est une somme ou une égalité de tenseurs de même type. Les indices correspondants non sommés (convention d'Einstein) dans un terme de l'équation doivent être symbolisés par la même lettre à la même position (haute ou basse) dans chaque terme de l'équation:

$$\begin{aligned} A^{\alpha} B^{\nu} C_{\rho} &= T^{\alpha\nu} D_{\rho} \quad \text{BON} , \\ A^{\alpha} B^{\nu} C_{\rho} &= T^{\alpha}_{\nu} D_{\rho} E^{\beta} \quad \text{mauvais} . \end{aligned}$$

2. L'intérêt de ces équations est qu'elles préservent leur forme sous une transformation générale de coordonnées, *c'est ce qu'on appelle la covariance d'une équation* sous un changement de coordonnée donné:

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}_{\mu\nu} = \tilde{B}_{\mu\nu} , \\ C_{\mu\nu} &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{C}_{\mu\nu} = 0 . \end{aligned}$$

Elles sont de plus *locales*, puisqu'elles sont toujours définies en un point donné. Cette propriété est un ingrédient relativiste capital.

3. Deux indices covariants d'un tenseur ou d'une équation tensorielle doivent toujours être symbolisés par des lettres différentes.

De même, deux indices contravariants doivent toujours être symbolisés par des lettres différentes.

L'égalité d'un indice covariant et d'un indice contravariant implique toujours une contraction (convention d'Einstein).

4. On peut toujours remplacer un indice par un autre, si on le fait de manière consistante dans toute l'équation et si le nouvel indice n'apparaissait pas déjà dans l'équation :

$$\begin{aligned}
 A^\alpha B^\nu C_\rho &= T^{\alpha\nu} D_\rho \rightarrow A^\alpha B^\delta C_\rho = T^{\alpha\delta} D_\rho && \text{BON ,} \\
 A^\alpha B^\nu C_\rho &= T^{\alpha\nu} D_\rho \rightarrow A^\alpha B^\delta C_\rho = T^{\alpha\sigma} D_\rho && \text{mauvais ,} \\
 A^\alpha B^\nu C_\rho &= T^{\alpha\nu} D_\rho \rightarrow A^\alpha B^\alpha C_\rho = T^{\alpha\alpha} D_\rho && \text{mauvais .}
 \end{aligned}$$

1.1.3 Covariance sous transformation de coordonnées

...on parle de covariance sous un certain type de transformation de coordonnées.

Mécanique de Newton ... elle est *covariante sous les transformations de Galilée*.

Les objets invariants ces transformations sont les scalaires, tandis que vecteurs se transforment à la manière de tenseurs (ils vérifient la loi de transformation donnée à la cinquième définition) sous les transformations de Galilée. C'est donc en termes de vecteurs que les équations de la mécanique de Newton est formulée.

Exemples: le scalaire de énergie E ; ou le vecteur quantité de mouvement \vec{p} .

Relativité Restreinte ... elle est *covariante sous transformation de Lorentz*. Les

objets, les plus simples, invariants sous ce type de transformation sont les scalaires...

Et comme la physique ne peut se construire à l'aide de seuls scalaires, on généralise

la notion de vecteur dans un espace à trois dimensions de la mécanique de Newton à la notion de tenseur dans un espace à quatre dimensions (dimensions indicées "0" pour le temps et "1,2,3" pour l'espace), dont le cas particulier du 4-vecteur.

Exemples:

- le 4-vecteur quantité de mouvement $p^\alpha = (E, -\vec{p})$.
- le tenseur électromagnétique et le 4-vecteur courant qui permettent de réécrire les équations de Maxwell de façon covariante sous transformations de Lorentz (une dérivée usuelle $\partial \cdot / \partial x^\mu$ se notera ${}_{,\mu}$):

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \text{ et } J^\mu = \left(\rho, \vec{\sigma} \right)$$

et les équations de Maxwell : $F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = J^\mu$,

où le champ électrique $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$, le champ magnétique $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, la densité de charge ρ et la densité de courant $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ correspondent aux notations usuelles.

Relativité Générale ...cette théorie est cette fois *covariante sous transformation de coordonnées généralisées*. Afin d'écrire des équations tensorielles covariantes quel que soit le changement de coordonnées, en plus de la notion de vecteur, on remplacera les dérivées usuelle par des dérivées covariantes (notée par un ";" ou un "|" au lieu de la "," de la dérivée usuelle -voir chapitre 2-).

Exemple:

- les équations de Maxwell écrites de façon covariante sous transformations quelconque de coordonnées:

$$F^{\mu\nu}{}_{;\nu} = J^\mu.$$

1.2 Exercices

1. (a) Ecrivez le changement de coordonnées des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques dans \mathbf{R}^3 .
 - (b) Obtenez les matrices de transformation $\left[\frac{\partial x^a}{\partial x'^b}\right]$ et $\left[\frac{\partial x'^a}{\partial x^b}\right]$ en les exprimant toutes les deux en termes des coordonnées primes.
 - (c) Trouvez les jacobiens J et J' . Quand J' est-il nul ou infini?
2. Démontrez les identités vectorielles suivantes par calcul tensoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w} ,$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot (\vec{w} \wedge \vec{t}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})(\vec{v} \cdot \vec{t}) - (\vec{u} \cdot \vec{t})(\vec{v} \cdot \vec{w}) .$$

L'identité suivante vous sera utile :

$$\sum_{i=1,2,3} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} ,$$

où le symbole δ_{ij} vaut 1 si $i = j$ et zéro sinon.

3. Il est possible de visualiser les vecteurs contravariants et covariants de la manière suivante. Localement, l'espace est en bonne approximation plat et c'est la non-orthogonalité des coordonnées qui va permettre de distinguer les 2 types de vecteurs.

Prenons le cas simple de vecteurs dans le plan. Je définis une base non orthogonale mais de norme unité (fig. 3). Un vecteur quelconque peut se projeter de deux manières. Les composantes contravariantes sont définies par la projection parallèle (fig. 4), et les composantes covariantes sont définies par la projection perpendiculaire (fig. 5).

- (a) Prouvez géométriquement que la norme de \vec{A} est donnée par $(A^\mu A_\mu)^{1/2}$.
- (b) Calculez la métrique dans la base \vec{e}_α .
Calculez A_μ en fonction de A^μ et vérifiez le résultat du (a).
- (c) Construisez la base \vec{e}^α telle que $\vec{A} = A_\alpha \vec{e}^\alpha$. Cette base est la base réciproque utilisée en cristallographie. Faites un dessin.

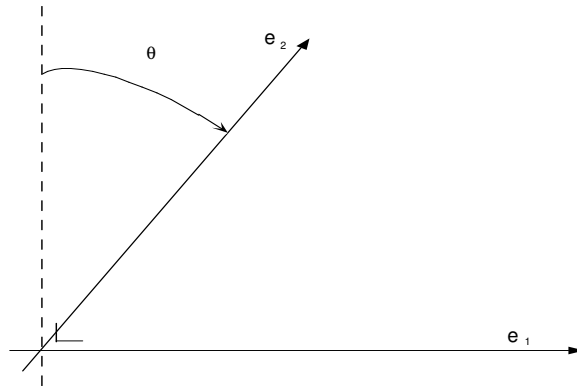


Figure 3: Base non orthogonale.

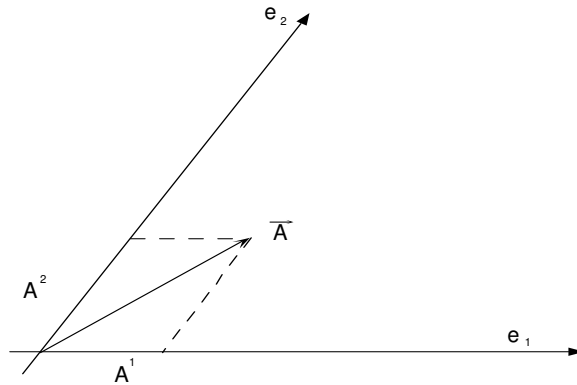


Figure 4: Composantes contravariantes d'un vecteur.

Note : Nous avons choisi ici d'identifier l'espace vectoriel original et son espace dual. Il n'y a donc qu'un seul type d'objets, les vecteurs, qui se décomposent selon deux bases.

En général les deux espaces ne peuvent pas être identifiés mais sont reliés par une bijection $A^\alpha \leftrightarrow A_\alpha$.

Les objets d'un espace sont appelés vecteurs et ceux de l'autre espace 1-formes. Leur dénomination commune est celle de tenseur (qui inclut aussi les produits directs de vecteurs et de 1-formes).

4. (a) Montrez que le fait qu'un tenseur covariant du second rang soit symétrique dans un système de coordonnées est une propriété tensorielle.

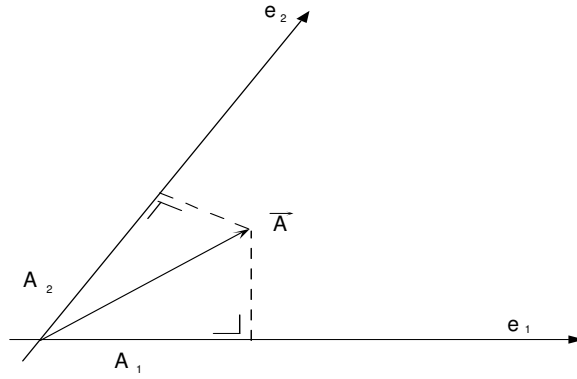


Figure 5: Composantes covariantes d'un vecteur.

(b) Soit $A_{\mu\nu}$ et $S^{\mu\nu}$ des tenseurs respectivement antisymétrique et symétrique.

Montrez que, pour un tenseur $V^{\mu\nu}$ quelconque,

- $A_{\mu\nu}S^{\mu\nu} = 0$
- $V^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu})A_{\mu\nu}$
- $V^{\mu\nu}S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu})S_{\mu\nu}$

5. Soit $D^{\mu\nu}$ un tenseur. Montrez que $\sum_{\mu} D^{\mu\mu}$ et $\sum_{\mu} D_{\mu\mu}$ ne sont pas invariants sous transformation de coordonnées mais que $\sum_{\mu} D_{\mu}^{\mu}$ l'est. Donnez un exemple.

6. Soit $F^{\alpha\beta}$ un tenseur antisymétrique sur ses 2 indices défini sur un espace muni de la métrique de Minkowski. Montrez que

$$F_{\mu}^{\alpha}{}_{,\nu} F^{\nu}{}_{\alpha} = -F_{\mu\alpha,\beta} F^{\alpha\beta}.$$

7. Montrez que le déterminant du tenseur métrique $g = \det(g_{\mu\nu})$ n'est pas un scalaire.

8. (a) Soit un tenseur $T^{\alpha\beta\cdots}$ de rang r dans un espace métrique à n dimensions. Combien de composantes indépendantes a-t-il?

(b) Si le tenseur est symétrique sur k indices, combien de composantes indépendantes a-t-il?

(c) Si le tenseur est antisymétrique sur ℓ indices, même question.

9. Je définis

$$V_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} \equiv \frac{1}{p!} \sum V_{\alpha_i, \dots, \alpha_{ip}} ,$$

$$V_{[\alpha_1, \dots, \alpha_p]} \equiv \frac{1}{p!} \sum (-1)^\pi V_{\alpha_i, \dots, \alpha_{ip}} .$$

La somme est faite sur toutes les permutations p des nombres $1, 2, \dots, p$ et $(-1)^\pi$ vaut $+1$ ou -1 selon la parité de la permutation. La quantité V peut avoir d'autres indices, qui ne sont pas indiqués, mais seuls les p indices indiqués entrent en jeu dans les définitions ci-dessus.

(a) Si $F_{\alpha\beta}$ est antisymétrique et $T_{\alpha\beta}$ symétrique, appliquez les définitions pour obtenir des formules explicites des expressions suivantes :

$$V_{[\mu\nu]} ; F_{[\mu\nu]} ; F_{(\mu\nu)} ; T_{[\mu\nu]} ; T_{(\mu\nu)} ; V_{[\alpha\beta\gamma]} ; T_{(\alpha\beta,\gamma)} ; F_{[\alpha\beta,\gamma]}$$

(b) Vérifiez les formules suivantes :

$$V_{((\alpha_1 \dots \alpha_p))} = V_{(\alpha_1 \dots \alpha_p)} ,$$

$$V_{[[\alpha_1 \dots \alpha_p]]} = V_{[\alpha_1 \dots \alpha_p]} ,$$

$$V_{(\alpha_1 \dots [\alpha_\ell \alpha_m] \dots \alpha_p)} = 0 ,$$

$$V_{[\alpha_1 \dots [\alpha_\ell \alpha_m] \dots \alpha_p]} = V_{[\alpha_1 \dots \alpha_\ell \alpha_m \dots \alpha_p]} .$$

(c) Utilisez ces notations pour montrer que $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$ implique les équations de Maxwell homogènes :

$$F_{\alpha\beta,\nu} + F_{\beta\nu,\alpha} + F_{\nu\alpha,\beta} = 0 .$$

10. (a) Montrez que, pour tout tenseur à 2 indices $X_{\alpha\beta}$,

$$X_{\alpha\beta} = X_{(\alpha\beta)} + X_{[\alpha\beta]} .$$

(b) Montrez que de façon générale

$$Y_{\alpha\beta\gamma} \neq Y_{(\alpha\beta\gamma)} + Y_{[\alpha\beta\gamma]} .$$

11. (a) Montrez que le delta de Kronecker δ_ν^μ est un tenseur.
 (b) Montrez que la métrique est un tenseur.
 (c) Montrez que la métrique inverse est un tenseur.
12. (a) Montrez que, à part une multiplication par une constante, il n'y a qu'un unique objet $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui est totalement antisymétrique (c.-à-d. sous l'échange de n'importe lesquels de ses indices) en 4 dimensions. On peut poser la convention que $\varepsilon_{0123} = 1$.
 (b) Quelle est la loi de transformation de $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$?
 (c) Définir une quantité comprenant $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ et qui est invariante sous une transformation générale de coordonnées.
 Les objets se transformant comme vous venez de le déterminer sont appelés *densités tensorielles*.
13. (a) Montrez que, dans un repère de Minkowski, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$.
 Quelle est la relation similaire dans un repère de coordonnées quelconques muni d'une métrique $g_{\mu\nu}$?
 (b) Quelle est la loi de transformation de $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ sous une transformation générale de coordonnées ?
 (c) Comment pourrait-on définir un invariant à partir de $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ (et même question pour $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$) ?

14. Évaluez $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ dans un repère de Minkowski.

15. Montrez que pour tout tenseur A^α_β

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} A^\alpha_\mu A^\beta_\nu A^\gamma_\lambda A^\delta_\sigma = \varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \det \|A^\alpha_\beta\| ,$$

où $\|A^\alpha_\beta\|$ est la matrice des composantes A^α_β .

16. Le tenseur $\delta_{\rho\cdots\sigma}^{\mu\cdots\lambda}$ est défini par

$$\delta_{\rho\cdots\sigma}^{\mu\cdots\lambda} \equiv \det \begin{bmatrix} \delta_\rho^\mu & \cdots & \delta_\rho^\lambda \\ \vdots & & \vdots \\ \delta_\sigma^\mu & \cdots & \delta_\sigma^\lambda \end{bmatrix}$$

Montrez que s'il y a plus de 4 indices supérieurs (ou inférieurs), le tenseur est identiquement nul.

17. Prouvez dans un repère de Minkowski la relation $\delta_{\lambda\kappa}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\lambda\kappa\rho\sigma}$ et généralisez pour des $\delta_{\lambda\dots\kappa}^{\mu\dots\nu}$ d'autres rangs.

18. Dans un espace à 4 dimensions, l'élément de volume tridimensionnel d'une hypersurface $x^\alpha = x^\alpha(a, b, c)$ est défini par

$$d^3\Sigma_\mu = \frac{1}{3!}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}da\,db\,dc\left[\frac{\partial(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma)}{\partial(a, b, c)}\right]$$

où le dernier facteur est un jacobien.

Calculez les composantes de $d^3\Sigma_\mu$ pour une hypersurface de genre espace $x^0 = \text{constant}$, paramétrisée par $x^1 = a, x^2 = b, x^3 = c$.

19. L'élément de volume propre en 4 dimensions est donné par $dV = (-g)^{1/2}d^4x$ où $d^4x = dx\,dy\,dz\,dt$ dans le système de coordonnées de la métrique $g_{\mu\nu}$. Montrez qu'il est invariant sous une transformation générale de coordonnées.

20. L'élément de volume propre tridimensionnel d'un observateur qui a une quadrivitesse u^α est

$$d^3v = (-g)^{1/2}u^0d^3x$$

Montrez que c'est un invariant scalaire et qu'il se réduit à l'expression usuelle dans un repère comobile.

21. Plaçons nous *dans un repère de Minkowski*:

(a) Prouvez que les quatre équations de Maxwell peuvent se réécrire sous une seule forme très compacte, à savoir

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = J^\mu.$$

Entre autre, montrez que, au vu de la définition de $F^{\mu\nu}$, l'équation suivante serait redondante

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0.$$

(b) On notera le 4-vecteur de potentiel électromagnétique par $K_\mu = \left(\phi, \vec{A} \right)$ où ϕ est le potentiel scalaire et \vec{A} le potentiel vecteur...ce tenseur est-il déterminé univoquement?

...rappel: les équations de Maxwell selon les conventions d'Heavyside ($4\pi \equiv c \equiv 1$) sont

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= +\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{\sigma}.\end{aligned}$$

2 DERIVEE COVARIANTE ET GEODESIQUES

2.1 Note théorique

2.1.1 Dérivée covariante d'un vecteur contravariant:

(fig. 6)

Considérons un champ vectoriel contravariant $V^\alpha(x^\mu)$. La différence entre 2 vecteurs de ce champ, situés en des points proches P (soit $V^\alpha(x^\mu)$) et Q (soit $V^\alpha(x^\mu + dx^\mu)$), vaut

$$V^\alpha_Q - V^\alpha_P = V^\alpha(x^\mu + dx^\mu) - V^\alpha(x^\mu) \equiv dV^\alpha(x^\mu).$$

La dérivée usuelle est définie comme le passage à la limite dans cette différence, c-à-d:

$$V^\alpha_{,\beta} \equiv \lim_{dx^\beta \rightarrow 0} \frac{1}{dx^\beta} \{V^\alpha_Q - V^\alpha_P\} = \lim_{dx^\beta \rightarrow 0} \frac{1}{dx^\beta} \{V^\alpha(x^\mu + dx^\mu) - V^\alpha(x^\mu)\}.$$

La différence entre le champ de vecteur en deux points, tout comme la dérivée usuelle, ne sont pas des tenseurs car j'ai soustrait des tenseurs évalués en 2 points différents P et Q .

Je vais donc définir une nouvelle dérivée, cette fois tensorielle, en construisant un vecteur au point Q , $V^\alpha_{//Q}$, qui sera le vecteur au P , V^α_P , transporté d'une certaine façon au point Q .

Puisque ces 2 points sont proches, je peux supposer que le vecteur transporté diffère peu du vecteur original en P , soit d'une quantité notée $\delta V^\alpha(x^\mu)$:

$$V^\alpha_{//Q} - V^\alpha_P = V^\alpha_{//}(x^\mu + dx^\mu) - V^\alpha(x^\mu) \equiv \delta V^\alpha(x^\mu).$$

Comme $\delta V^\alpha(x^\mu)$ doit être nul quand $V^\alpha(x^\mu)$ ou dx^μ est nul, je peux supposer que $\delta V^\alpha(x^\mu)$ est tout simplement linéaire en V^α et dx^μ . Je définis donc

$$\delta V^\alpha(x^\mu) = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(x^\mu) V^\beta(x^\mu) dx^\gamma$$

où le signe moins est conventionnel et $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ est appelé connexion. La connexion contient l'information sur la façon d'effectuer le transport, que l'on appellera *transport*

parallèle.

On peut cette fois parler de la différence entre deux vecteurs au même point Q :

$$V^\alpha|_Q - V^\alpha|_{//Q} = V^\alpha(x^\mu + dx^\mu) - [V^\alpha(x^\mu) + \delta V^\alpha(x^\mu)] = dV^\alpha(x^\mu) - \delta V^\alpha(x^\mu).$$

Je définis ensuite la dérivée covariante par le passage à la limite dans cette différence :

$$V^\alpha|_{;\beta} \equiv \lim_{dx^\beta \rightarrow 0} \frac{1}{dx^\beta} \{V^\alpha|_Q - V^\alpha|_{//Q}\} = \lim_{dx^\beta \rightarrow 0} \{V^\alpha(x + dx) - [V^\alpha(x) + \delta V^\alpha(x)]\}$$

et donc,

$$\boxed{V^\alpha|_{;\beta} = V^\alpha|_{,\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} V^\gamma.}$$

... Cette nouvelle dérivée sera un tenseur, à partir du moment où $V^\alpha|_Q - V^\alpha|_{//Q}$ l'est.

Il reste à déduire les propriétés de transformation de $\Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$ (cf exercice 2a) pour que $V^\alpha|_Q - V^\alpha|_{//Q}$ soit un tenseur, ce qui revient encore à imposer que $V^\alpha|_{;\beta}$ se transforme comme un tenseur (contrairement à $V^\alpha|_{,\beta}$!).

Nous trouvons:

$$\boxed{\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta} &= \frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^a} \frac{\partial x^c}{\partial \widetilde{x}^\gamma} \frac{\partial x^b}{\partial \widetilde{x}^\beta} \Gamma^a_{cb} + \frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^a} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \widetilde{x}^\gamma \partial \widetilde{x}^\beta} \\ &= \frac{\partial \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^a} \frac{\partial x^c}{\partial \widetilde{x}^\gamma} \frac{\partial x^b}{\partial \widetilde{x}^\beta} \Gamma^a_{cb} - \frac{\partial x^a}{\partial \widetilde{x}^\gamma} \frac{\partial x^b}{\partial \widetilde{x}^\beta} \frac{\partial^2 \widetilde{x}^\alpha}{\partial x^a \partial x^b} \end{aligned}}$$

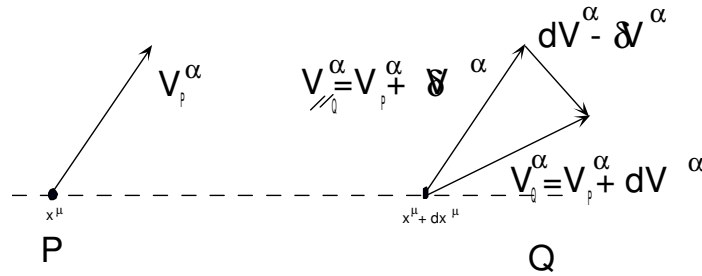


Figure 6: Transport parallèle.

2.1.2 Dérivée covariante d'un tenseur covariant:

On peut montrer (exercice 4) que la dérivée covariante d'un vecteur covariant s'écrit comme:

$$V_{\alpha|\beta} = V_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} V_{\gamma}.$$

2.1.3 Dérivée covariante d'un tenseur de rang quelconque:

On généralisera la dérivée covariante à un tenseur de rang (p, q) quelconque de la façon suivante (exercice 5):

$$T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}{}_{|\gamma} = T_{\beta_1 \dots \beta_q, \gamma}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha_1} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\sigma \dots \alpha_p} + \dots + \Gamma_{\sigma\gamma}^{\alpha_p} T_{\beta_1 \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \sigma} - \Gamma_{\beta_1 \gamma}^{\sigma} T_{\sigma \dots \beta_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_p} + \dots - \Gamma_{\beta_q \gamma}^{\sigma} T_{\beta_1 \dots \sigma}^{\alpha_1 \dots \alpha_p}.$$

2.1.4 Equation de Newton en coordonnées généralisées:

Le but fixé par Einstein en développant la Relativité Générale était d'établir une nouvelle théorie de la mécanique qui succéderait à la Relativité Restreinte (ne prenant en compte que des transformations de Lorentz, c'est-à-dire des transformation entres repères en mouvements à vitesse relative constante), comprendrait la gravitation et serait cette fois compatible avec le formalisme des équations électromagnétiques de Maxwell. Cette nouvelle théorie tiendrait cette fois compte des transformations généralisées (accélérations) entre les différents repère... Ainsi, une équation décrirait le mouvement d'une particule massive ou non, valable dans n'importe quel système de coordonnées généralisées (que ce soit un référentiel inertiel ou non).

Esquissons brièvement ces équations...

Les équations du mouvement d'une particule dans un repère inertiel ($\vec{x} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{t}, \dot{\vec{x}}$) sont données par les célèbres équations de Newton. On peut les redériver à partir du principe variationnel appliqué au lagrangien correspondant en coordonnées cartésiennes ($L = T - V$ où $T =$ l'énergie cinétique et $V =$ le potentiel), ce qui donne lieu aux équations d'Euler Lagrange.

Soit pour

$$T(\dot{\vec{x}}, t) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} \delta_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

$$F_i = - \frac{\partial V}{\partial x^i}(\vec{x}, t) \quad \dots \text{ où la force } \vec{F} \text{ est conservative,}$$

les équations d'Euler Lagrange sont

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^k} \right) &= - \frac{\partial V}{\partial x^k} \\ \Leftrightarrow m \ddot{x}^k &= F^k \quad . \end{aligned}$$

Pour trouver **les équations du mouvement en coordonnées généralisées** $(\vec{q}, t, \dot{\vec{q}})$, il suffit donc de réutiliser les équations d'Euler Lagrange², mais exprimées cette fois dans les nouvelles coordonnées. La formulation lagrangienne présente en effet cet avantage conséquent sur la formulation Newtonienne d'être invariante sous changement de coordonnées $(q^i(x^j))$ puisque le lagrangien L est un scalaire!

Soit

$$\begin{aligned} T(\dot{\vec{q}}, t) &= \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \\ Q_i &= \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} \right] V(\vec{q}, t) \quad \dots \text{ pour la force } \vec{Q}, \text{ force généralisée,} \end{aligned}$$

où g_{ij} est la métrique de l'espace $(g_{ij} = \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j) \dots$

Les équations d'Euler Lagrange sont donc cette fois-ci

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^k} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q^k} &= Q_k \\ \Leftrightarrow \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left(g_{kj} \dot{q}^j + g_{ik} \dot{q}^i \right) - \frac{m}{2} g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j &= Q_k \\ \Leftrightarrow m \frac{d}{dt} \left(g_{ik} \dot{q}^i \right) - \frac{m}{2} g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j &= Q_k \end{aligned}$$

²Vous trouverez la dérivation des équations d'Euler Lagrange, exprimées en termes d'indices covariants, à partir du principe variationnel, dans le cours PHYS1140.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow m g_{ik} \ddot{q}^i + m g_{ik,l} \dot{q}^l \dot{q}^i - \frac{m}{2} g_{ij,k} \dot{q}^i \dot{q}^j &= Q_k \\ \Leftrightarrow m g_{ik} \ddot{q}^i + \frac{m}{2} (2g_{ik,j} - g_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j &= Q_k \quad ; \end{aligned}$$

soit encore en multipliant par g^{kl} ,

$$\Leftrightarrow m \ddot{q}^l + m \frac{g^{kl}}{2} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}) \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k$$

$$\Leftrightarrow m \ddot{q}^l + m \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} \dot{q}^i \dot{q}^j = Q_k \quad .$$

Ce système d'équations du mouvement obtenu ici en terme de coordonnées généralisées mérite quelques remarques.

Tout d'abord, le premier terme de cette équation n'est autre chose que le terme "masse*accélération" correspondant à la seconde loi de Newton dans un référentiel inertiel. On retrouve effectivement Newton en se plaçant en coordonnées cartésiennes c'est-à-dire en utilisant la métrique de Minkowski ($g_{ij} = \eta_{ij}$).

Le second terme représente les forces apparentes/fictives dans un repère non inertiel (voir l'exercice 15 pour illustration), qui peuvent toujours être annulées localement par une transformation de coordonnées appropriée (transformation non linéaire. Voir exercice 2a et b), tout comme le stipule le *principe d'équivalence*. Ceci est faisable car la connexion n'est pas un tenseur (voir exercice 2a). Rappelons que si toutes les composantes d'un tenseur sont nulles en un même point donné, elles seront toujours nulles, quelque soit le point où elles seront évaluées (voir la loi de transformation des composantes d'un tenseur sous changement de coordonnées). Nous verrons que la gravitation, implémentée par la géométrie de l'espace-temps est une force de type fictive.

Lorsqu'aucun terme de force généralisé n'est présent ($Q_k = 0 \quad \forall k$) ces équations sont appelées *équations des géodésiques* et correspondent au mouvement d'une particule libre dans la géométrie donnée par g_{ij} . Elles peuvent être directement dérivées à partir du principe variationnel appliqué à l'action pour une particule massive ou non (voir exercices 10 et 11).

Egalement, c'est une connexion particulière qui intervient dans les équations des

géodésiques pour la Relativité Générale, dont les composantes sont appelées *symboles de Christoffel de seconde espèce* $\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\}$

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta\gamma \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\alpha\sigma}(g_{\beta\sigma,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}) .$$

Cette connexion est obtenue en se restreignant aux transformations de coordonnées (transports parallèles) qui conservent les normes des vecteurs, ce qui impose que la dérivée covariante de la métrique soit nulle (voir exercice 7); et à une connexion symétrique, ce qui correspond à imposer le principe d'équivalence (voir exercice 6b).

2.2 Exercices

1. Montrez que la dérivée usuelle d'un vecteur n'est pas un tenseur en écrivant la loi de transformation.
2. (a) Montrez que $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ n'est pas un tenseur en établissant sa loi de transformation sous changement de coordonnées, soit à partir de la définition de la dérivée covariante, soit à partir de la définition de la variation des vecteurs de base :

$$d\vec{e}_\alpha = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu dx^\beta \vec{e}_\mu .$$

Note : toute quantité qui obéit à cette loi de transformation est appelée *connexion affine*.

- (b) Soit une connexion symétrique $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ qui prend dans le système de coordonnées x^μ et au point P les valeurs $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha|_P$. Montrez qu'il est possible de construire une transformation $x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$ telle que $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha|_P = 0$.

Note : Il est même possible d'annuler la connexion le long d'une courbe quelconque en choisissant un système de coordonnées adapté.

3. Prouvez que la dérivée covariante d'un scalaire est égale à la dérivée habituelle.
4. Si l'on exige que la dérivée covariante satisfasse à la règle de Leibniz, établissez la formule de la dérivée covariante d'un vecteur covariant.
5. Etablissez la formule de la dérivée covariante d'un tenseur de rang (p, q) .
6. (a) La partie de la connexion antisymétrique en ses indices covariants est appelée torsion, $Q_{\beta\gamma}^\sigma$. Prouvez que la torsion est un tenseur.
(b) Montrez que le principe d'équivalence implique une connexion symétrique.
7. *Connexion et symbole de Christoffel:*
 - (a) En imposant la conservation de la longueur d'un vecteur au cours d'un transport parallèle, démontrez que la dérivée covariante de la métrique est nulle.

- (b) En imposant la condition (a) et une connexion symétrique, calculez l'expression de celle-ci en fonction de la métrique.

Note : on appelle cette expression pour la connexion “*symbole de Christoffel de 2e espèce*”.

- (c) Sans imposer une connexion symétrique mais en gardant la condition (a), calculez l'expression de cette connexion en fonction de la métrique et de la torsion.

8. Le symbole de Christoffel de 2e espèce est défini par

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta\gamma \end{array} \right\} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} (g_{\beta\sigma,\gamma} + g_{\gamma\sigma,\beta} - g_{\beta\gamma,\sigma}) .$$

Montrez qu'il se transforme comme une connexion.

Note : On voit ainsi qu'il est consistant d'égaliser la connexion au symbole de Christoffel.

9. *Géodésiques affines :*

Soit une courbe paramétrisée par $x^\alpha = f^\alpha(\lambda)$. Le vecteur tangent à la courbe au point P est

$$\left. \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right|_P \equiv u^\alpha(P) .$$

Si cette courbe telle que le vecteur tangent en un point P quelconque, transporté parallèlement au point Q , est parallèle au vecteur tangent à la courbe en Q , elle est appelée *géodésique affine*.

- (a) Etablissez l'équation de la géodesique affine:

$$\begin{aligned} u^\beta u^\alpha_{|\beta} &= g(\lambda) u^\alpha \\ \Leftrightarrow \frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma &= g(\lambda) u^\alpha \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} &= g(\lambda) u^\alpha . \end{aligned}$$

- (b) Si on prend une connexion conservant les longueurs (cf exercice 7) et $d\lambda$ comme élément de longueur (c.-à-d. $d\lambda = ds$ où $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$),

montrez que l'équation des géodésiques devient :

$$u^\alpha u^\beta |_\alpha = 0 .$$

Note : on appelle cette paramétrisation : *paramétrisation affine*.

- (c) Montrez que l'équation des géodésiques conserve la forme $u^\alpha u^\beta |_\alpha = 0$ pour une classe de paramètres, appelés *paramètres affins*, reliés par des transformations linéaires.

10. *Géodésiques métriques, à partir de l'action pour particules massives:*

Soit l'action pour une particule de masse m

$$I_1 = - \int m c ds = - \int m c \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda , \quad \text{où} \quad \dot{x}^\mu \equiv u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda} ,$$

λ paramétrisant la courbe.

Calculez par principe variationnel l'équation des courbes minimisant I_1 (les dérivées de la métrique seront regroupées dans le symbole de Christoffel défini à l'exercice 8),

- (a) en supposant que la paramétrisation est affine : $\lambda = \alpha s + \beta$,
 (b) pour une paramétrisation quelconque.
 (c) Minimiser l'action I_1 correspond à maximiser le temps propre de la particule. Montrez que, dans un champ gravitationnel faible, la trajectoire d'une particule ayant une vitesse non relativiste minimise l'action classique ($I_{classique} = \int (\frac{m v^2}{2} - V) dt$).

11. *Géodésiques métriques, à partir de l'action pour particules massives ou non:*

Soit l'action pour une particule de masse m

$$I_2 = -\frac{c}{2} \int \left(e^{-1}(\lambda) g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + m^2 e(\lambda) \right) d\lambda ,$$

où $e(\lambda)$ est une fonction quelconque de λ . Cette action est invariante sous la reparamétrisation $\lambda \rightarrow \tilde{\lambda}(\lambda)$ si

$$e \rightarrow \frac{d\lambda}{d\tilde{\lambda}} e .$$

- (a) En variant I_2 par rapport à e , vérifiez que I_2 est équivalent à I_1 .
- Note :** I_2 présente des avantages par rapport à I_1 , surtout en paramétrisation affine :
- pas de problème de définition de la racine carrée
 - valable aussi bien pour $m \neq 0$ que $m = 0$
 - calcul plus facile des géodésiques car pas de racine
- (b) En variant I_2 par rapport à x^μ (sans remplacer e par son expression calculée en (a) !), calculez l'équation des courbes minimisant I_2 .
- (c) Le choix de la fonction $e(\lambda)$ correspond à une paramétrisation de la courbe. Quel choix faut-il faire pour que la paramétrisation soit affine ? (On se ramène aux courbes de l'exercice 9b).
- (d) Que se passe-t-il si m tend vers zéro ? L'action reste-t-elle la même ? Et les courbes la minimisant ?
- (e) Montrez que la limite classique de I_2 pour une particule massive est l'action correspondant au lagrangien de la mécanique classique ($L = E_k - E_{\text{de masse au repos}}$).
- (f) Prouvez que $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \alpha$, où α est une constante, est une intégrale première de l'équation des géodésiques.

Vous pouvez alors calculer les géodésiques plus facilement par principe variationnel appliqué sur l'action

$$I = -\frac{c}{2} \int g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu d\lambda.$$

On obtient

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial K}{\partial x^\mu} = 0$$

où $K = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \alpha$ et

$$\begin{aligned} \alpha &= +1 \quad \text{si géodésique de genre temps} \\ &= 0 \quad \text{si géodésique de genre lumière} \end{aligned}$$

Note : On peut remplacer une des équations des géodésiques par son intégrale première, donnée par l'élément de longueur $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \alpha$.

- (g) Montrez que si $g_{\mu\nu}$ est indépendant de x^α pour un α fixé, alors $u_\alpha = g_{\alpha\mu} dx^\mu/d\lambda$ est une constante du mouvement.

Note : Cette nouvelle intégrale première peut remplacer une autre équation géodésique. Par exemple, si la métrique est indépendante du temps et diagonale, alors

$$u_0 = g_{00} \frac{dx^0}{ds}$$

est une constante correspondant à l'énergie relativiste de la particule.

12. Considérez la transformation suivante, s'appliquant à la métrique (transformation de Weyl):

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \widetilde{g}_{\mu\nu} = \chi^2(x^\mu) g_{\mu\nu}$$

- (a) Comment se réécrit l'équation des géodesiques,

$$\frac{du^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0 \quad \text{où} \quad u^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \lambda},$$

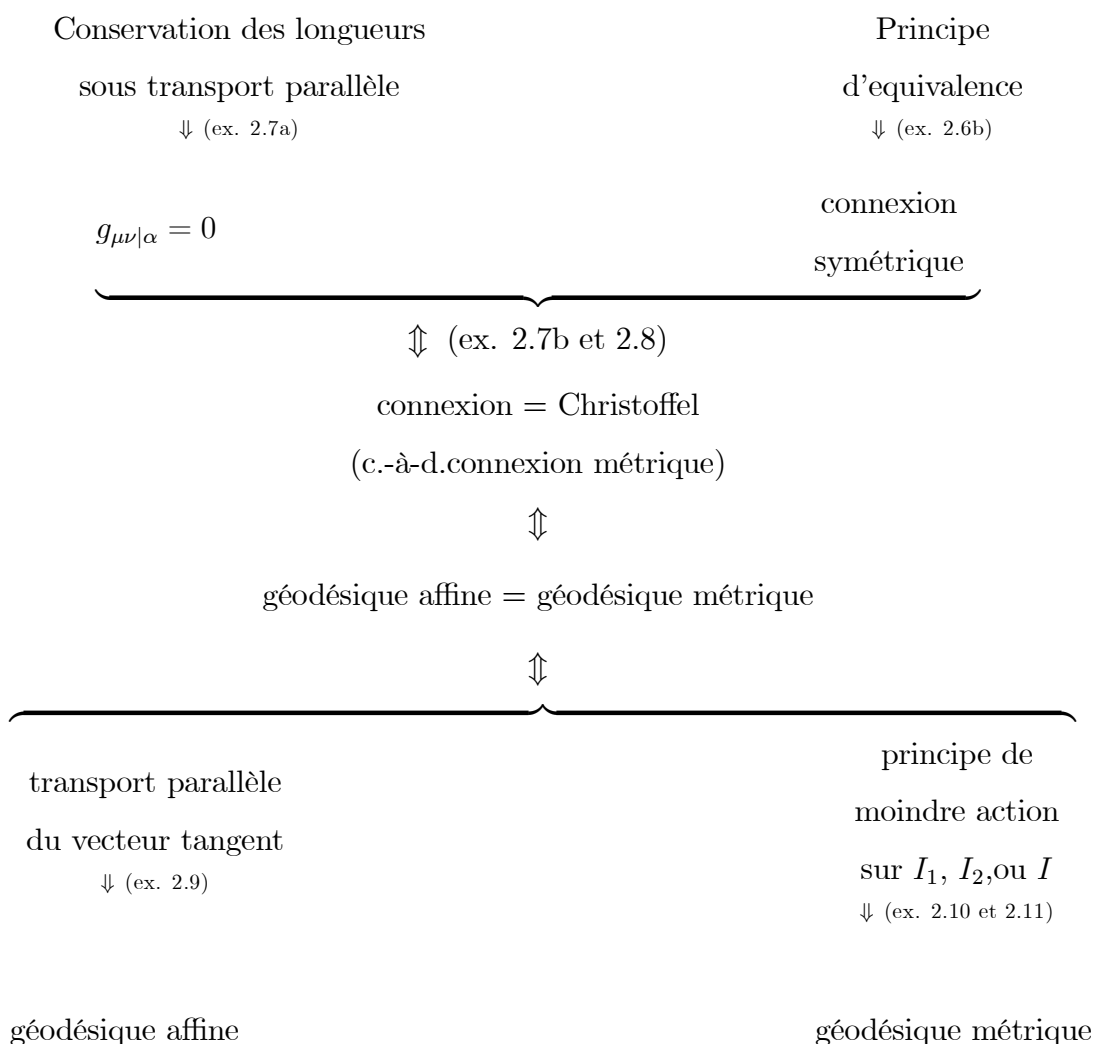
en termes de la nouvelle métrique $\widetilde{g}_{\mu\nu}$?

- (b) Comment interprétez-vous le "terme supplémentaire" obtenu pour cette "nouvelle équation des géodesiques" (rappelez-vous les résultats des trois exercices précédents)?

Résumé théorique sur les géodésiques

Les courbes minimisant I_1 et I_2 sont appelées *géodésiques métriques*. Elles sont les mêmes que les *géodésiques affines* si la connexion est choisie égale au symbole de Christoffel. On parle alors de *connexion métrique*. On peut voir que cela entraîne que la dérivée covariante de la métrique est nulle. Cela vaut en fait dans les 2 sens; c'est ce que nous avons prouvé à l'exercice 7 : si $g_{\mu\nu|\alpha} = 0$, alors la connexion est la connexion métrique.

Sous forme de schéma :



Remarque : Nous travaillerons désormais avec une connexion métrique et des géodésiques paramétrisées affinement.

13. Dans un repère inertiel où la métrique est $\eta_{\mu\nu}$, l'équation du mouvement d'une particule libre est

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0 ,$$

où τ est le temps propre. En utilisant une transformation générale de coordonnées, transforme la métrique en $g_{\mu\nu}$ et montre que l'équation du mouvement devient l'équation des géodésiques :

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0 .$$

14. Soit un espace euclidien plat à deux dimensions, décrit par des coordonnées polaires r et θ .

- (a) Calculez les symboles de Christoffel à partir des vecteurs unitaires, en utilisant la définition

$$\frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \vec{e}_\mu .$$

- (b) En coordonnées cartésiennes (x, y) , la connexion est donnée par

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0 , \quad \forall (\alpha, \beta, \gamma)$$

Utilisez la loi de transformation pour les symboles de Christoffel pour les calculer en coordonnées polaires.

- (c) A partir de l'intervalle

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 ,$$

calculez les symboles de Christoffel de la façon usuelle comme des dérivées des coefficients de la métrique $g_{\mu\nu}$.

(Les trois méthodes doivent évidemment fournir comme résultats les mêmes valeurs pour les symboles de Christoffel. Il y a encore une quatrième méthode possible : à partir de l'équation des géodésiques, si l'on sait d'avance quelles sont les géodésiques. Pour les courageux...).

15. Tu as 7 ans et tu te trouves sur un cheval de bois dans un manège. Quelles sont les forces fictives qui s'exercent sur toi, si tu considères ton cheval comme au repos ? (Indication : calcule l'équation des géodésiques pour la métrique d'un repère en rotation).

16. Soit l'espace métrique (qui vous est maintenant assez familier) :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 .$$

(a) Ecrivez les deux équations qui résultent de l'équation des géodésiques et montrez que les équations suivantes en sont des intégrales premières :

$$r^2 \frac{d\theta}{ds} = R_0 ,$$

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 1 ,$$

où R_0 est une constante.

(b) Utilisez les résultats ci-dessus pour obtenir une équation différentielle du premier ordre pour $r(\theta)$.

(c.-à-d. éliminez s en tant que paramètre et substituez-le par θ).

(c) En tenant compte du fait que l'espace métrique ci-dessus est tout simplement un espace euclidien plat à deux dimensions, écrivez l'équation générale pour une ligne droite en coordonnées r et θ et montrez que la ligne droite satisfait l'équation obtenue en (b).

17. Ecrivez l'équation des géodésiques en coordonnées sphériques (3D).

18. Dans le plan muni de coordonnées polaires (r, θ) ,

(a) écrivez les équations décrivant un vecteur qui serait transporté parallèlement le long de la courbe suivante (c.-à-d que en tout point Q de la courbe, on a $V^\alpha_Q = V^\alpha // Q$):

- i. une droite passant par l'origine,
- ii. le cercle unité.

- (b) Résolvez les équations dans chacun des cas pour obtenir l'expression du vecteur transporté parallèlement (A^r et A^θ); illustrez et interprétez en référence aux coordonnées cartésiennes (A^x et A^y).
19. Sur la surface de la 2-sphère ($ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$), le vecteur \tilde{A} est égal à \vec{e}_θ en $\theta = \theta_0, \phi = 0$ ($\vec{e}_\theta =$ vecteur unitaire de déplacement lorsque l'on varie θ). Que vaut \tilde{A} après son transport parallèle le long du cercle $\theta = \theta_0$? Que vaut sa norme?
20. Considère la Terre comme la surface d'une sphère de rayon R . En coordonnées sphériques l'équateur correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et les pôles nord et sud à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ respectivement. Calcule l'effet du transport parallèle d'un champ de vecteurs arbitraire, tangent à la Terre, $S_\alpha = (S_\theta, S_\phi)$ autour d'une courbe fermée partant de $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ le long d'une courbe de longitude constante jusqu'au pôle nord, puis le long d'une ligne de longitude constante ϕ_0 jusqu'à l'équateur, et puis de retour au point de départ le long de l'équateur.
21. Soit la métrique en 2 dimensions

$$ds^2 = \frac{dx^2 - dt^2}{t^2}.$$

- (a) Calcule les symboles de Christoffel et les équations des géodésiques (ces dernières en repartant du principe variationnel, c-à-d les intégrales premières (voir ex 2.11 f et g), pour plus de facilité).
- (b) Intègre ces équations et dessine-les.
22. Soit la métrique d'un espace à 1 + 1 dimensions :

$$ds^2 = \frac{r^2 dr^2}{(r^2 - a^2)^2} - \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{r^2 - a^2}, \quad r > a.$$

- (a) Calculez l'équation des géodésiques de genre temps, lumière et espace.
- (b) Si vous interprétez r et θ comme les coordonnées polaires d'un plan euclidien, montrez que les géodésiques sont des droites de ce plan. Quelle est la particularité des géodésiques de genre lumière?

23. Une projection cartographique de type cylindrique projette la surface du globe sur un cylindre l'enveloppant et tangent à l'équateur. Les méridiens sont projetés sur des droites verticales dont l'espacement est constant et les parallèles sur des droites horizontales dont l'espacement varie suivant une loi à spécifier. La projection de Mercator est une projection cylindrique conforme, autrement dit elle conserve les angles. En navigation, la boussole permet de suivre des trajets à cap constant, c.-à-d. coupant les méridiens et les parallèles sous un angle constant. Il est pratique d'établir une carte où ces routes sont représentées par des droites. C'est ce que fait la projection de Mercator grâce à sa propriété de conformité.

- (a) Prouvez qu'une transformation conforme $\tilde{g}_{\mu\nu}(x^\alpha) = \chi^2(x^\alpha) g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ conserve les angles.
- (b) Imposez que la métrique de la surface de la sphère soit conformément plate (c.-à-d $g_{\mu\nu} \text{ sphère} = \chi^2(x^\alpha) (dx^2 + dy^2)$) et utilisez les propriétés de la projection cylindrique pour établir le lien entre les coordonnées (θ, ϕ) de la sphère et les coordonnées (x, y) de la carte.
- (c) Donnez la variation de l'intervalle entre les parallèles sur la carte en fonction de la latitude.
- (d) Donnez l'équation des géodésiques de la sphère dans les coordonnées de la carte ainsi que dans les coordonnées de la sphère. Résolvez ces équations.

24. Soit la métrique

$$ds^2 = (c^2 - a^2 t) dt^2 - 2 a t dx dt - dx^2 - dy^2 - dz^2 .$$

Calcule et résous l'équation des géodésiques. Interprète le résultat.

25. Pour une métrique diagonale, montrez que dans un système de coordonnées, les symboles de Christoffel sont donnés par :

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda\lambda}^{\mu} &= -\frac{1}{2g_{\mu\mu}}g_{\lambda\lambda,\mu} \\ \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} &= [\ln \sqrt{|g_{\mu\mu}|}]_{,\lambda} \\ \Gamma_{\mu\mu}^{\mu} &= [\ln \sqrt{|g_{\mu\mu}|}]_{,\mu}\end{aligned}$$

où $\mu \neq \nu \neq \lambda$ et il n'y a pas de sommation sur les indices répétés.

26. Pour une métrique quelconque,

(a) montre que

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}(\ln g)_{,\nu}$$

où g est la valeur absolue du déterminant de la métrique.

(b) Déduis-en que, si φ est un champ scalaire,

$$g^{\mu\nu}\varphi_{|\mu|\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}(g^{\mu\nu}\sqrt{g}\varphi_{,\mu})_{,\nu}$$

27. Opérateurs et coordonnées sphériques.

(a) Calculez la métrique en coordonnées sphériques en 3 dimensions.

(b) Soit S un scalaire et V un vecteur.

On exprime les gradient, divergence et rotationnel en fonction des dérivées covariantes comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_i S = g^{ij} S_{,j} \\ \nabla \cdot V = V^i_{|i} \\ (\nabla \times V)^j = \varepsilon^{jkl} V_{\ell|k} \quad \text{où } \varepsilon^{123} = g^{-1/2} \end{array} \right.$$

Calculez les gradient, divergence, rotationnel et laplacien en coordonnées sphériques. (Indication : l'exercice 25 facilite le calcul). Comparez avec les expressions de votre formulaire de calcul vectoriel.

Note : Les expressions obtenues sont valables dans la base de coordonnées, obtenue à partir de la base cartésienne par changement de coordonnées. Les composantes d'un vecteur sont alors les composantes contravariantes. Cependant, une autre convention est habituellement utilisée dans

le calcul vectoriel en coordonnées curvilinéaires. La base est dans ce cas normalisée (et ne peut plus être obtenue par changement de coordonnées !). Les composantes d'un vecteur dans cette base sont $\bar{V}_i = h_i V^i = h_i^{-1} V_i$ où $g_{ij} = h_i^2 \delta_{ij}$ (la métrique est diagonale). Pour retomber sur les expressions habituelles des opérateurs vectoriels, vous devez les redéfinir dans la base normalisée et exprimer les résultats en fonction des composantes du vecteur dans cette base, c.-à-d. \bar{V}_i .

28. Vérifie les identités suivantes :

- (a) $g_{\alpha\beta,\gamma} = \{\beta\gamma, \alpha\} + \{\alpha\gamma, \beta\}$
où $\{\alpha\beta, \gamma\} \equiv g_{\sigma\gamma} \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} = g_{\sigma\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma}$
- (b) $g_{\alpha\mu} g^{\mu\beta}{}_{,\gamma} = -g^{\mu\beta} g_{\alpha\mu,\gamma}$
- (c) $g^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} = -\Gamma_{\mu\gamma}^{\alpha} g^{\mu\beta} - \Gamma_{\mu\gamma}^{\beta} g^{\mu\alpha}$
- (d) $g_{,\alpha} = -g g_{\beta\gamma} \quad g^{\beta\gamma}{}_{,\alpha} = g g^{\beta\gamma} g_{\beta\gamma,\alpha}$
- (e) $\Gamma_{\alpha\beta}^{\alpha} = (\ln \sqrt{g})_{,\beta}$
- (f) $g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(g^{\alpha\nu} \sqrt{|g|} \right)_{,\nu}$
- (g) $A^{\alpha}{}_{|\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} A^{\alpha} \right)_{,\alpha}$
- (h) $A_{\alpha}{}^{\beta}{}_{|\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} A_{\alpha}{}^{\beta} \right)_{,\beta} - \Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} A_{\lambda}{}^{\mu}$
- (i) $A^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} A^{\alpha\beta} \right)_{,\beta} \quad \text{si } A^{\alpha\beta} \text{ est antisymétrique.}$
- (j) $\square S \equiv S_{|\alpha}{}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \left(\sqrt{|g|} g^{\alpha\beta} S_{,\beta} \right)_{,\alpha}$

Note : on écrit souvent $\Gamma_{\alpha\beta}^{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}$ qui est le symbole de Christoffel de 2e espèce tandis que $\{\alpha\beta, \gamma\}$ est appelé symbole de Christoffel de 1ère espèce.

29. Prouve que les objets suivants sont des tenseurs même s'ils ne comprennent que des dérivées usuelles :

- (a) $F_{\alpha\beta} = A_{\beta,\alpha} - A_{\alpha,\beta}$,

$$(b) Z^\alpha = A^\beta B^\alpha_{,\beta} - B^\beta A^\alpha_{,\beta} ,$$

$$(c) N^\alpha_{\beta\gamma} = J^\alpha_\sigma J^\sigma_{\gamma,\beta} - J^\alpha_\sigma J^\sigma_{\beta,\gamma} - J^\sigma_\beta J^\alpha_{\gamma,\sigma} + J^\sigma_\gamma J^\alpha_{\beta,\sigma} .$$

où A, B sont des vecteurs et J un tenseur de type $(1,1)$.

30. Vous vous souvenez peut-être du soit-disant paradoxe des jumeaux, dans lequel un astronaute fait un aller-retour de la Terre à une destination quelconque à une vitesse proche de celle de la lumière. A son retour il retrouve son frère jumeau beaucoup plus âgé que lui (ou mort). En relativité restreinte, l'effet de l'accélération sur l'âge des astronautes est négligé (sauf comme argument pour considérer la situation comme asymétrique). Il est possible de traiter plus complètement ce problème en relativité générale.

Soit 2 horloges identiques A et B , synchronisées et au repos au départ sur la surface de la Terre. A reste au repos, tandis que B tourne autour du globe à une hauteur h dans un avion dont la vitesse par rapport au sol est v . Après un tour du monde, A et B sont comparés, c.-à-d. que le temps propre τ_A de A est comparé avec le temps propre τ_B de B .

Le tour du monde se fait à l'équateur. La Terre a une vitesse angulaire de ω_T par rapport au repère localement inertiel dans lequel elle se trouve (c.-à-d. un repère en chute libre dans le champ du soleil).

- (a) Calculez τ_A et τ_B en utilisant la paramétrisation d'Eddington-Robertson.
 (b) Calculez la quantité $\delta = \frac{\tau_B - \tau_A}{\tau_A}$ et simplifiez en développant au 1er ordre.
 (c) Évaluez le décalage entre les 2 horloges pour une altitude et vitesse de l'avion raisonnables (2 cas : l'avion vole vers l'est ou vers l'ouest).

Note : Cette expérience a été réalisée en 1971 (vol non équatorial) avec pour résultats :

	$\tau_B - \tau_A (ns)$	
direction du vol	expérience	théorie
vers l'ouest	273 ± 7	275 ± 21
vers l'est	-59 ± 10	-40 ± 23

31. *Equations de Maxwell et équations duales.*

- (a) Reformulez les équations de Maxwell de façon à ce qu'elles soient covariantes sous n'importe quel changement de coordonnées (en coordonnées généralisées).

(avoir fait préalablement l'exercice 1.21)

- (b) On définit le tenseur dual $F^{*\mu\nu}$ comme

$$F^{*\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

Si l'on devait penser que l'esthétique est une considération importante pour les lois de la physique, on serait tenté d'écrire les équations de Maxwell comme

$$\begin{aligned} F^{*\mu\nu}{}_{|\nu} &= L^\mu \\ F^{\mu\nu}{}_{|\nu} &= J^\mu. \end{aligned}$$

...Quelle serait alors la signification de L^μ ?

32. *Contribution électromagnétique au tenseur énergie-moment.*

- (a) Calculez l'expression de la contribution électromagnétique au tenseur énergie moment en notant

$$\begin{array}{c} T^{\mu\nu} \\ \text{tenseur énergie-moment global} \\ \parallel \\ M^{\mu\nu} + E^{\mu\nu} \\ \text{contribution due à la matière} \quad \text{contribution due au champ électromagnétique} \end{array} .$$

Vous trouverez

$$E^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} .$$

- (b) Montrez que la trace de ce tenseur est nulle. Interprétez ce résultat par rapport à la densité d'énergie $T = T^\nu_\nu$.
- (c) Montrez que $E^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$ (c-à-d la contribution électromagnétique au tenseur énergie moment est conservée) en l'absence de sources chargées.
Qu'en est-il en présence de sources chargées?

3 COURBURE

3.1 Note sur les conventions

Lors de la lecture d'un livre ou d'un article, il faut faire attention aux différentes conventions adoptées par les auteurs.

Trois conventions de signe posent souvent des problèmes.

Métrie de Minkowski

Dans le cours, elle est choisie de trace négative :

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Un vecteur de genre temps aura donc dans une métrique quelconque un $ds^2 > 0$.

On trouve souvent

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, un vecteur de genre temps dans une métrique quelconque a $ds^2 < 0$.

Tenseur de Riemann

Dans le cours, il est défini comme suit :

$$R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta} - \Gamma^\alpha_{\beta\delta,\gamma} + \Gamma^\sigma_{\beta\gamma} \Gamma^\alpha_{\sigma\delta} - \Gamma^\sigma_{\beta\delta} \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma} .$$

On trouve souvent la convention de signe opposée.

Tenseur de Ricci

Dans le cours, il est contracté sur le premier et dernier indice:

$$R_{\beta\gamma} = R^\alpha_{\beta\gamma\alpha} = g^{\lambda\alpha} R_{\lambda\beta\gamma\alpha} .$$

On trouve souvent la convention de contraction entre le premier et troisième indice, ce qui donne un signe différent vu l'antisymétrie des deux derniers indices.

Scalaire de courbure

$$R = R^\gamma{}_\gamma = g^{\beta\gamma} R_{\beta\gamma} .$$

3.2 Exercices

1. Combien de composantes indépendantes le tenseur de Riemann a-t-il en n dimensions ?

(a) Pour le tenseur de Riemann mixte $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ qui ne nécessite pas la notion de métrique pour sa définition:

- Vérifie d'abord les symétries suivantes: $R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha_{\beta\delta\gamma}$ et $0 = R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} \equiv R^\alpha_{\beta\gamma\delta} + R^\alpha_{\gamma\delta\beta} + R^\alpha_{\delta\beta\gamma}$,
- Utilise la méthode des tableaux de Young.
- Vérifie la réponse obtenue par analyse combinatoire.

(a) Pour le tenseur de Riemann covariant $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ qui lui nécessite la notion de métrique pour sa définition:

- Vérifie d'abord les symétries suivantes: $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} = +R_{\gamma\delta\alpha\beta}$ et $0 = R_{\alpha[\beta\gamma\delta]}$,
- Utilise la méthode des tableaux de Young.
- Vérifie la réponse obtenue par analyse combinatoire.

2. Dans le cas d'une connexion non symétrique, démontre la relation

$$V^\alpha_{|\beta|\gamma} - V^\alpha_{|\gamma|\beta} = R^\alpha_{\sigma\beta\gamma} V^\sigma - 2Q^\sigma_{\beta\gamma} V^\alpha_{|\sigma}$$

où le tenseur $Q^\sigma_{\beta\gamma} \equiv \frac{1}{2} (\Gamma^\sigma_{\beta\gamma} - \Gamma^\sigma_{\gamma\beta})$ est appelé la *torsion*.

3. Quelle est la condition pour que l'on puisse définir un champ de vecteurs globalement parallèles sur une variété ? (Utilise la condition d'intégrabilité d'une équation différentielle, c.-à-d. que les dérivées partielles commutent).

4. Un circuit infinitésimal en forme de parallélogramme peut être spécifié par les déplacements côtés du parallélogramme. Soit un vecteur A qui est transporté parallèlement sur ce circuit. Montre que A est modifié par le transport autour du circuit par

$$\Delta A^\alpha = \frac{1}{2} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} A^\beta \Delta S^{\gamma\delta}$$

où $\Delta S^{\gamma\delta}$ sont les composantes de l'élément de surface.

5. Prouve les identités dites de Bianchi: $R_{\alpha\beta[\gamma\delta]\sigma} = 0$

Note : utilise un système de coordonnées localement inertiel.

6. Le tenseur d'Einstein est défini par $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$. Montre que les identités de Bianchi entraînent que la dérivée covariante du tenseur d'Einstein est nulle : $G^{\mu\nu}{}_{|\nu} = 0$.

7. Dans un espace à petit nombre de dimensions, il existe des expressions simples pour le tenseur de Riemann tout à fait covariant :

- (a) Que vaut ce tenseur dans un espace à 1 dimension ?
- (b) Exprime ce tenseur dans un espace à 2 dimensions en fonction de la métrique et du scalaire de courbure.
- (c) Exprime ce tenseur dans un espace à 3 dimensions en fonction de la métrique et du tenseur de Ricci.
- (d) Exprime Riemann en n dimensions en fonction de la métrique, de Ricci et d'un tenseur supplémentaire, le *tenseur de Weyl* , qui a les mêmes symétries que Riemann et dont les traces sont nulles :

$$g^{\mu\nu} W_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 ,$$

$$g^{\mu\rho} W_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 .$$

8. Prouve que le tenseur de Ricci est symétrique. (L'exercice 2.26 peut être utile.)

9. Calcule les composantes du tenseur de courbure dans un espace euclidien à 3 dimensions, ainsi que le scalaire de courbure :

- (a) pour la surface d'un cylindre;
- (b) pour la surface d'un cône droit;
- (c) pour la surface d'une sphère.

10. (a) Calcule la métrique pour la surface d'un tore dans un espace euclidien à 3 dimensions.
- (b) Calcule le tenseur de courbure correspondant ainsi que le scalaire de courbure.
11. (a) Montre que les dérivées secondes covariantes d'un champ scalaire commutent.
- (b) Calcule les dérivées troisièmes $S_{|(\alpha\beta)\gamma}$ et $S_{|\alpha[\beta\gamma]}$.

Note : $S_{|\alpha\beta\gamma} \equiv S_{|\alpha|\beta|\gamma}$

12. Prouve que pour tout tenseur de rang 2,

$$A^{\mu\nu}{}_{|\mu\nu} = A^{\mu\nu}{}_{|\nu\mu} .$$

13. Dans un espace isotrope de dimension n , le tenseur de Riemann peut s'écrire :

$$R_{abcd} = K(g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) .$$

- (a) Justifie cette expression.
- (b) Utilise les identités de Bianchi pour montrer que K doit être une constante si $n > 2$.
- (c) Calcule le scalaire de courbure.
- (d) Montre que cet espace est *un espace conformément plat*, c.-à-d. que le tenseur de Weyl est nul.
14. Prouve que tout espace à 2D possédant une métrique de signature nulle est conformément plat, c.-à-d que tu peux ramener la métrique à la forme $g_{\mu\nu} = e^{2\phi} \eta_{\mu\nu}$. Indication : utilise des courbes de genre lumière comme courbes de coordonnées en passant aux coordonnées

$$\lambda = \lambda(x, y) ,$$

$$\nu = \nu(x, y) ,$$

vérifiant

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}\lambda_{,\alpha}\lambda_{,\beta} &= 0, \\ g^{\alpha\beta}\nu_{,\alpha}\nu_{,\beta} &= 0. \end{aligned}$$

15. *Paramétrisation d'Eddington-Robertson:*

Calcule $R_{\mu\nu}$ et R dans la paramétrisation d'Eddington-Robertson.

16. *Théorie Scalaire de Nordström:*

(a) Calcule le tenseur de Riemann, le tenseur de Ricci, le scalaire de courbure et le tenseur de Weyl pour la métrique conformément plate $g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\eta_{\mu\nu}$ (en 4 dimensions) où $\phi = \phi(x^\mu)$ est une fonction arbitraire. Cette question est un cas particulier de l'exercice 3.18.

(b) Une théorie métrique (inventée par Nordström en 1913) relie $g_{\mu\nu}$ à $T_{\mu\nu}$ par les équations

$$\begin{cases} W_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \\ R = kT, \end{cases}$$

où $W_{\mu\nu\rho\sigma}$ est le tenseur de Weyl.

Montre que cette théorie, dans la limite newtonienne et avec le bon choix de la constante k , est en accord avec la théorie de gravitation newtonienne, mais que cette théorie ne prédit pas la déflexion de la lumière par le soleil. Cette théorie est-elle en accord avec l'expérience de Pound-Rebka ? (remarque: tu peux utiliser les résultats de l'exercice 3.15)

Note : une condition nécessaire et suffisante pour qu'une métrique soit conformément plate est que le tenseur de Weyl soit nul; c'est pourquoi nous avons utilisé ce terme en ce sens à l'exercice 13.

17. Montre que les équations de Maxwell sont invariantes sous ce qu'on appelle "transformation conforme/de Weyl" en dimension 4:

$$\begin{cases} g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} &= e^{2\phi}g_{\mu\nu}, \\ F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}, \\ J_\mu \rightarrow \tilde{J}_\mu &= e^{-2\phi}J_\mu, \end{cases}$$

où ϕ est une fonction arbitraire de x^μ .

18. (a) Calculez l'effet d'une transformation conforme de la métrique sur le tenseur de courbure en n dimensions, c.-à-d. calculez \widetilde{R} , $\widetilde{R}_{\mu\nu}$ et $\widetilde{R}_{\mu\nu\rho\sigma}$ en fonction de R , $R_{\mu\nu}$ et $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ si $\widetilde{g}_{\mu\nu} = e^{2\phi} g_{\mu\nu}$ où ϕ est une fonction arbitraire de x^μ . (Utilisez les résultats déjà obtenus pour l'exercice 2.12)

Vous trouverez:

$$\begin{aligned} \bullet \widetilde{R}_{kijl} &= e^{2\phi} \left\{ \begin{array}{l} R_{kijl} + g_{kj} \phi_{|i|l} - g_{kl} \phi_{|i|j} + g_{il} \phi_{|k|j} - g_{ij} \phi_{|k|l} \\ -g_{kj} \phi_{|i} \phi_{|l} + g_{kl} \phi_{|i} \phi_{|j} - g_{il} \phi_{|k} \phi_{|j} + g_{ij} \phi_{|k} \phi_{|l} \\ + (g_{kj} g_{il} - g_{kl} g_{ij}) g^{ab} \phi_{|a} \phi_{|b} \end{array} \right\} \\ \bullet \widetilde{R}_{ij} &= R_{ij} + (2-n) \phi_{|i|j} - g_{ij} g^{ab} \phi_{|a|b} - (2-n) \phi_{|i} \phi_{|j} + (2-n) g_{ij} g^{ab} \phi_{|a} \phi_{|b} \\ \bullet \widetilde{R} &= e^{-2\phi} \{ R + 2(1-n) g^{ij} \phi_{|i|j} + (n-1)(2-n) g^{ij} \phi_{|i} \phi_{|j} \} \end{aligned}$$

- (b) Prouvez que le tenseur de Weyl $W^\mu_{\nu\rho\sigma}$ est un invariant conforme, c.-à-d. $\widetilde{W}_{kijl} = W_{kijl}$.

Note : On utilise la transformation conforme sur une action gravitationnelle pour introduire un couplage champ gravitationnel-champ scalaire, où ϕ est interprété comme champ scalaire (ex : théorie de Brans-Dicke, dilaton en théorie des cordes).

L'invariance conforme du tenseur de Weyl est utilisée pour construire des théories invariantes conformes.

19. (a) Calcule la constante de gravitation G en unités "naturelles" (en tout cas en particules élémentaires), c.-à-d. en GeV (giga électronvolts). Ces unités sont définies par $\hbar = c = 1$.
- (b) Les unités de Planck sont définies par $\hbar = c = G = 1$.
Exprime les quantités suivantes en unités de Planck : un Watt, un Newton, la constante de structure fine, la masse du soleil, la taille d'un atome d'hydrogène, 1 GeV, l'âge de l'univers.
20. Montre qu'un rayon de lumière de section circulaire ne subit pas de distorsion (le cercle ne se déforme pas en ellipse) si le tenseur de Weyl est nul.

21. Soit la métrique

$$ds^2 = e^{2\phi} dt^2 - e^{2\theta} dz^2 - dx^2 - dy^2 ,$$

où ϕ et θ sont des fonctions de z uniquement.

(a) Calcule le tenseur de Riemann et donne la condition sur ϕ et θ pour qu'il soit nul.

(b) Si $\theta = -\phi$, calcule la métrique pour que l'espace soit plat.

22. *Equations d'ondes électromagnétiques.*

Dérivez l'équation de propagation du potentiel électromagnétique:

$$\square K_\mu = J_\mu - R^\epsilon{}_\mu K_\epsilon ,$$

et celle du champ électromagnétique:

$$\square F_{\mu\epsilon} = J_{\mu|\epsilon} - J_{\epsilon|\mu} + 2R_{\sigma\epsilon\nu\mu} F^{\sigma\nu} + R^\sigma{}_\epsilon F_{\sigma\mu} - R^\sigma{}_\mu F_{\sigma\epsilon} ,$$

à partir des équations de Maxwell.

Remarques:

- suite à la sous-question "b" de l'exercice 1.21, choisissez la jauge $K^\mu{}_{|\mu} = 0$;
- utilisez l'identité démontrée dans l'exercice 3.2 où la torsion est ici nulle.

23. *Action électromagnétique et principe variationnel.*

Retrouvez, à l'aide du principe variationnel de l'action électromagnétique

$$S_{em} = \frac{1}{4} \int dx^4 \sqrt{-g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} ,$$

(a) les équations du champ électromagnétique, en variant l'action par rapport au potentiel K_μ :

$$F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = J^\mu ,$$

(b) l'expression du tenseur énergie-moment électromagnétique $E^{\mu\nu}$ (voir exercice 2.32) en variant cette fois par rapport à la métrique $g_{\mu\nu}$.

4 RELATIVITE GENERALE

4.1 Solution de Schwarzschild.

Il s'agit de calculer la métrique à l'extérieur d'une étoile de masse "M". Celle-ci est considérée en première approximation comme sphérique.

La forme la plus générale pour l'élément de distance à 4D possédant la symétrie sphérique est :

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

où $\nu = \nu(t, r)$ et $\lambda = \lambda(t, r)$ sont des fonctions arbitraires de r et t .

1. Justifie l'expression de ds^2 .
2. Calcule $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ et g .
3. Calcule $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$.
4. Calcule $R_{\alpha\beta}$.
5. Prouve le théorème de Birkhoff : toute solution à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans le vide est statique. Tu dois donc prouver qu'il est possible de définir $\nu = \nu(r)$ et $\lambda = \lambda(r)$.
6. Détermine les solutions à symétrie sphérique de l'équation d'Einstein dans le vide de façon à retrouver le résultat classique de Newton dans la limite de champ faible (c-à-d loin de l'étoile).

Tu établis ainsi les "solutions de Schwarzschild" où $e^{2\nu} = (1 + 2\frac{V}{c^2})$ et V est le potentiel de Newton associé à la source sphérique de masse "M".

4.2 Matière sombre et constante cosmologique.

On observe que la vitesse de rotation d'une étoile autour du centre de sa galaxie devient approximativement indépendante du rayon de sa trajectoire quand celui-ci devient grand ($r \gtrsim 50\ 000$ années-lumière).

1. Quelle est la prédiction de la gravitation newtonienne ?
2. La relativité générale est en accord avec Newton pour des effets de champ faible. Elle ne résout donc pas le problème. C'est ce qui mène à postuler la présence de matière supplémentaire dans la galaxie, encore non observée, appelée *matière sombre*.

Une autre possibilité serait l'introduction d'une constante cosmologique. Résous donc l'équation d'Einstein munie d'une constante cosmologique non nulle pour trouver les solutions à symétrie sphérique :

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta} = 0 .$$

(Utilise les calculs de l'exercice 4.1).

3. Que devient le potentiel de Newton si $\Lambda \neq 0$?
Calcule la valeur de Λ nécessaire pour expliquer les observations. Tu peux supposer que la majeure partie de la masse de la galaxie est concentrée dans son noyau ($M \simeq 10^{11} \times$ masse du soleil).

4.3 Solution de Schwarzschild en présence de matière ("Schwarzschild intérieur").

1. Quel est le tenseur énergie-impulsion pour un fluide parfait de densité $\rho(x^\mu)$ et de pression $P(x^\mu)$? Ecris les équations de conservation de ce tenseur en fonction de ρ, P et de la métrique de l'exercice 4.1.
2. Soit une boule de rayon r de gaz de poussière, c.-à-d. un fluide parfait où la pression est nulle. Cherche la solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein si le vide règne à l'extérieur de la boule.
3. Soit un fluide parfait de pression et densité quelconques mais à symétrie sphérique.

En utilisant la loi de conservation de l'énergie-impulsion et l'équation d'Einstein, écris les équations liant la métrique aux variables $\rho(r), P(r)$ et $m(r)$

où

$$m(r) = \int_0^r \rho(u) 4\pi u^2 du .$$

Montre que ces 3 variables sont liées par 2 équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho , \\ \frac{dP}{dr} &= -G \frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2Gm)} . \end{aligned}$$

Note : Pour résoudre ce système, tu as besoin d'une équation supplémentaire, l'équation d'état $P = P(\rho)$, ainsi que de conditions frontières. Tu peux alors résoudre les équations te donnant la métrique en fonction de P, ρ, m . L'équation liant P, ρ et m est appelée équation d'Oppenheimer-Volkoff. Elle est utile pour étudier, par exemple, l'effondrement gravitationnel d'une étoile en un trou noir.

4. Résous l'équation d'Oppenheimer-Volkoff en supposant que la densité ρ est constante pour $r < R$ et nulle pour $r \geq R$, où R est le rayon de l'étoile. C'est la solution de "Schwarzschild intérieur". Vérifie la continuité avec "Schwarzschild extérieur" à la surface de l'étoile.

4.4 Tenseur de Weyl.

1. Calcule le tenseur de Weyl pour la métrique à symétrie sphérique donnée à l'exercice 4.1.
2. Vérifie que la solution de Schwarzschild intérieur (cf exercice 4.3) est conformément plate.

4.5 Schwarzschild en coordonnées isotropes

La métrique de Schwarzschild, telle que dérivée à l'exercice 4.4.1, n'est pas donnée en *coordonnées isotropes* car l'élément de longueur qui y correspond présente un coefficient différent pour l'élément radial (dr^2) et l'élément angulaire ($r^2 d\Omega^2$ où

$$d\Omega^2 = d\theta + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Il est possible, par un changement de coordonnées, de se ramener à une forme isotrope:

$$ds^2 = f(r_I) dt^2 - h(r_I) (dr_I^2 - r_I^2 d\Omega^2) \quad .$$

1. Montre que ce changement de coordonnées, obtenu par intégration, et en identifiant les deux éléments de longueur, est le suivant:

$$r_S \equiv r_I \left(1 - \frac{V(r_I)}{2c^2} \right)^2 ,$$

où r_S est la variable r dans la métrique de Schwarzschild; r_I , la variable radiale en coordonnées isotropes; et V , le potentiel gravitationnel de cette même métrique.

Ecris ensuite l'élément de longueur de Schwarzschild en coordonnées isotropes.

2. Détermine les facteurs (α, β, γ) en comparant le résultat obtenu en 1 avec la métrique de Eddington-Robertson.
3. Que devient l'horizon de Schwarzschild en coordonnées isotropes ?
4. L'horizon est-il une singularité physique/essentielle?

4.6 Contrainte des tests classiques sur la constante cosmologique.

Soit un espace-temps vide à symétrie sphérique en présence d'une constante cosmologique Λ , dont tu as calculé la métrique à l'exercice 4.2.

1. Ecris l'équation des géodésiques.
2. Quelle est l'équation du mouvement d'une particule massive ?
Le déplacement du périhélie est-il modifié par rapport au cas $\Lambda = 0$?
3. Quelle est l'équation du mouvement d'un photon ? La déflexion de la lumière est-elle plus ou moins importante que si $\Lambda = 0$?
4. D'après tes résultats ci-dessus, donne une limite sur Λ .

4.7 Chute libre dans un trou noir.

Une particule massive est initialement au repos par rapport à un trou noir, décrit par la métrique de Schwarzschild. Elle est lâchée et tombe en chute libre dans le trou noir, radialement.

1. Quel **temps propre** s'écoule entre son passage en r_1 et son passage en r_2 (avec $r_1 > r_2$)...
 - (a) si la particule part de l'infini? Particulariser au temps mis pour atteindre l'horizon, puis de l'horizon au centre du trou-noir.
 - (b) si la particule part de r_0 fini $\geq r_1$? Particulariser au temps mis pour atteindre l'horizon, puis de l'horizon au centre du trou-noir.
2. Quel **temps de coordonnées (pour un observateur à l'infini)** s'écoule entre son passage en r_1 et son passage en r_2 (avec $r_1 > r_2$)...
 - (a) si la particule part de l'infini? Et particulariser au temps mis pour atteindre l'horizon.
 - (b) si la particule part de r_0 fini $\geq r_1$? Et particulariser au temps mis pour atteindre l'horizon.
3. Comparer et expliquer la différence entre le résultat obtenu en terme de temps propre et de temps de coordonnées.

Note : le calcul des géodésiques se fait le plus simplement comme expliqué dans la note après l'exercice 2.11 sur les géodésiques.

4.8 Orbites circulaires.

1. Etablis l'équation des géodésiques d'une particule massive dans un potentiel de Schwarzschild.

- En écrivant l'équation de la trajectoire comme une somme $E_p + E_k = const.$, détermine la condition d'existence d'orbites circulaires, leurs rayons ainsi que leur stabilité ou instabilité.
- Montre que la loi de Kepler

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$$

est vérifiée pour les orbites circulaires de Schwarzschild si T est la période calculée à l'infini.

4.9 Les trois faux jumeaux.

Jean-Marc est en orbite circulaire dans un potentiel de Schwarzschild.

- Calcule la période de révolution de Jean-Marc en fonction du rayon de l'orbite et de la masse à la source du potentiel.
- Jean-Marc veut montrer comme il tourne vite et envoie un signal après chaque tour à Jacques qui se repose à l'infini. Mais quel intervalle de temps va donc mesurer Jacques entre deux signaux ?
- Jean est à califourchon sur une fusée qui le maintient immobile en un point de l'orbite de Jean-Marc. Combien de temps s'écoule-t-il pour lui entre deux passages successifs de son collègue mais néanmoins ami ?
- Calcule 2 en secondes si Jean-Marc se trouve à $r = 6GM/c^2$ et si $M = 14 M_{soleil}$. On s'attend à ce que le spectre de rayons X de la source Cygnus X-1 présente au minimum une telle fluctuation. Peux-tu le justifier ?
- Si Jacques vieillit de 40 ans, de combien d'années aura vieilli Jean-Marc ?

4.10 Capture de la lumière par un trou noir.

- Calcule l'équation des géodésiques pour la déflexion de la lumière par un objet massif (potentiel de type Schwarzschild). Utilise les coordonnées de Schwarzschild.

2. Détermine les orbites circulaires. Sont-elles stables ?
3. Quel est le paramètre d'impact en-dessous duquel un photon venant de l'infini sera capturé ? Calcule la section efficace de capture de la lumière par un trou noir.

4.11 Solution de Reissner-Nordström.

Il s'agit de calculer la métrique autour d'une masse ponctuelle chargée. Il y a donc symétrie sphérique. On suppose que la

solution est statique et asymptotiquement plate, c.-à-d. que la métrique tend vers la métrique de Minkowski loin de la masse. La solution de Schwarzschild est un cas particulier quand la charge est nulle.

1. Que deviennent les équations de Maxwell en présence de gravitation ?
2. Choisis un repère tel que la particule est au repos à l'origine.
Calcule $F^{\mu\nu}$.
Résous les équations de Maxwell, c.-à-d. trouve le champ électromagnétique à une distance quelconque de la charge.
3. Le tenseur énergie-moment électromagnétique (voir exercice 2.32) s'écrit :

$$E_{\mu\nu} = -g^{\alpha\beta} F_{\mu\alpha} F_{\nu\beta} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} .$$

Résous l'équation d'Einstein $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ (Tu peux poser $G = 1$).

4.12 Chute libre dans un trou noir chargé.

Décris le mouvement d'une particule neutre massive en chute radiale dans un trou noir chargé (métrique de Reissner-Nordström, ex 4.4.11).

4.13 Equations de Friedmann-Lemaître.

La métrique pour un espace homogène et isotrope (métrique de Robertson-Walker), utilisée en cosmologie, s'écrit en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{d\sigma^2}{1 - k\sigma^2} + \sigma^2 d\Omega^2 \right\} .$$

Elle peut se réécrire :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) g_{ij} dq^i dq^j$$

où g_{ij} est la métrique de l'espace à 3 dimensions, indépendante du temps. Calcule les équations de Friedmann-Lemaître, en insérant cette dernière métrique dans l'équation d'Einstein, en présence d'un fluide parfait.

4.14 Modèle cosmologique anisotrope et solution de Kasner.

Soit la métrique définie par

$$ds^2 = c^2 dt^2 - t^{2p_1} dx_1^2 - t^{2p_2} dx_2^2 - t^{2p_3} dx_3^2$$

où p_1, p_2, p_3 sont des constantes.

1. Calcule les composantes du tenseur de Ricci.
2. Montre alors que l'équation d'Einstein en l'absence de source n'admet pas de solution 3-isotrope.
3. Prouve que la solution anisotrope du type $p_1 = p_2 \neq p_3$ est unique si nous imposons un tenseur de Weyl non nul. Cette solution est appelée *métrique de Kasner*.

Note : Une solution de ce type a été proposée pour expliquer la compactification de dimensions supplémentaires (cf exercice 4.17). En effet, si un des p_i est négatif, la dimension x_i deviendra rapidement non observable.

4.15 Marées.

4.15.1 Gravitation newtonienne.

1. Calcule le potentiel gravitationnel, en un point de la surface de la Terre, dû au soleil (tu peux travailler en coupe, donc à 2 dimensions).

Calcule les forces dérivant du potentiel et décompose le résultat en force uniforme “de chute libre” et en force de marée.

Fais un dessin des forces en différents points de la surface.

2. Exprime le potentiel à la surface, en 3 dimensions, comme un développement de Taylor autour de l’origine placée au centre de la Terre. Interprète les premiers termes du développement.

4.15.2 Relativité générale

1. Utilise le principe d’équivalence pour écrire la relation entre la connexion et le potentiel de Newton au 1er ordre.
2. Déduis-en $R^i_{\ ooj}$ (travaille dans un repère localement inertiel).
3. Déduis-en la relation entre la composante W_{iooj} du tenseur de Weyl et le potentiel de Newton. Compare avec la gravitation newtonienne.

4.16 Avance du périhélie.

Note : Va revoir dans Landau-Lifschitz ou un autre livre pour le calcul d’une orbite d’après le Lagrangien (problème de Kepler).

4.16.1 Cas général: une métrique dans la paramétrisation d’Eddington-Robertson

Soit une métrique donnée dans la paramétrisation d’Eddington-Robertson :

$$ds^2 = A^2(r) dt^2 - B^2(r) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) ,$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A^2(r) = 1 + 2\alpha \frac{V}{c^2} + 2\beta \left(\frac{V}{c^2}\right)^2 + O\left(\frac{1}{c^6}\right) \\ B^2(r) = 1 - 2\gamma \frac{V}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \\ \alpha, \beta, \gamma \text{ sont les paramètres d'Eddington-Robertson} \\ V(r) \text{ est le potentiel de Newton} \end{array} \right.$$

1. Etablis les équations des géodésiques.
2. Intègre les équations pour obtenir les constantes du mouvement (énergie et moment angulaire).
3. Ecris l'équation du mouvement pour la variable $u \equiv 1/r$, en considérant u comme une fonction de φ . Retrouves-tu l'équation du mouvement de Newton dans la limite classique $c \rightarrow \infty$?
4. En utilisant le fait que la vitesse radiale s'annule aux rayons minimum r_- et maximum r_+ de l'orbite, calcule les constantes du mouvement en fonction de r_- et de r_+ .
5. Dans la limite de champ faible $V/c^2 \ll 1$, tu peux développer les facteurs A , B , E et J en fonction de V/c^2 . Etablis le développement de l'équation du mouvement jusqu'au deuxième ordre en V/c^2 .
6. Dérive l'équation du mouvement par rapport à φ pour obtenir une équation différentielle du second degré en fonction des paramètres α , β , γ , puis résous-la.

4.16.2 Relativité restreinte

Soit l'action pour une particule de masse m dans un potentiel gravitationnel

$$V(r) = -GM/r :$$

$$S = \int d\tau (-mc^2 - mV) .$$

1. En interprétant cette action comme l'intégrale d'un élément de longueur dans un espace courbe, calcule la métrique correspondante. Elle est la solution des équations de la *théorie scalaire* (cf exercice 3.16b).

2. Calcule les paramètres d'Eddington-Robertson de cette théorie.
3. Déduis en les prédictions en matière d'avance du périhélie de Mercure pour cette théorie et compare tes résultats à l'observation.

4.16.3 Relativité générale

1. Calcule les paramètres d'Eddington-Robertson pour la métrique de Schwarzschild (ex 4.1)
2. Déduis en les prédictions en matière d'avance du périhélie de Mercure pour cette théorie et compare tes résultats à l'observation.

4.16.4 Données pratiques:

Pour le décalage du périhélie de Mercure, les valeurs numériques appropriées sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Période de Mercure} = 88 \text{ jours} \\ \text{Masse du soleil} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg} \\ \text{Rayon minimum de l'orbite} = 46 \text{ millions de km} \\ \text{Rayon maximum de l'orbite} = 70 \text{ millions de km} \end{array} \right.$$

Les observations permettent de déduire une avance du périhélie de Mercure de $43''$ /siècle...

4.17 Kaluza-Klein.

Une des premières tentatives d'unifier la gravitation avec une autre interaction est celle de Kaluza et Klein dans les années 20.

L'espace-temps usuel à 4 dimensions est englobé dans un espace à 5 dimensions où la 5e dimension est compactifiée, c.-à-d. que la 5e coordonnée est périodique sur un cercle de très petit rayon.

La métrique en 5 dimensions a la forme générale

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{ab} - \phi A_a A_b & -A_a \phi \\ -A_b \phi & -\phi \end{pmatrix}$$

où g_{ab} est la métrique de l'espace-temps usuel à 4 dimensions, ϕ est un scalaire et A_a un vecteur.

1. Montre qu'un changement de la 5e coordonnée correspond à une transformation de jauge sur A_μ .
2. Suppose que la physique est décrite par la généralisation à 5 dimensions de l'action d'Einstein. Réduis cette action à 4 dimensions en l'exprimant en fonction du scalaire de courbure à 4 dimensions et de A_μ en posant, pour simplifier le calcul, $\phi = 1$. Interprète le résultat.
3. Ecris l'équation des géodésiques en 4 dimensions. Interprète les différents termes.

4.18 Principe variationnel et action d'Hilbert-Einstein.

Les équations du champs d'Einstein (avec constante cosmologique Λ) peuvent-être redérivées à partir d'une action dite d' "Hilbert-Einstein".

1. Retrouvez les équations d'Einstein à partir du principe variationnel appliqué à l'action

$$S_{H-E} = \int dx^4 \sqrt{-g} R \quad .$$

2. Utilisant la derivation ci-dessus, montrez que l'action suivante permet cette fois de retrouver les équations d'Einstein en présence d'une constante cosmologique.

$$S_{H-E-\Lambda} = \int dx^4 \sqrt{-g} (R + 2\Lambda) \quad .$$

3. Commentez l'action correspondant à la matière de façon à retrouver par principe variationnel les équations d'Einstein en présence de sources (avec le tenseur énergie-moment $T^{\mu\nu}$).